Matemáticas 2

Hilda Elizabeth García Martínez

innova EDICIONES
serie INNOVAT secundaria

Dirección general: Alma Delia Carlos Gómez
Dirección de proyecto editorial: Maria Núñez De León
Gerente editorial: María de los Ángeles Toledo Olmos
Edición: Mario Aburto
Revisión técnica: Rubén García Madero
Corrección de estilo: Sergio Gaspar
Lecturas: Sergio Gaspar, Rubén García Madero
Diagramación: Despacho El quinto 9, Juliana Porras
Diseño de portada: Krystel Galván
Diseño de interiores: Krystel Galván
Fotografía: Shutterstock
Ilustraciones: Armando Martínez Jaramillo

Matemáticas 2, Serie INNOVAT

ISBN Pendiente

Primera edición: 2018

Impreso en México
Printed in Mexico

Estimado alumno:

Bienvenido a este nuevo curso, durante el cual tu libro *Matemáticas 2* será una valiosa herramienta para adquirir conocimientos y desarrollar nuevas habilidades, actitudes y valores que te permitan ampliar tu pensamiento matemático para resolver diversos problemas de manera eficaz.

Con tu libro de *Matemáticas 2* desarrollarás todos los aprendizajes de la asignatura mediante **secuencias didácticas** y lecciones organizadas por bloques, que se dividen en tres grandes momentos:

- **Exploramos.** En esta parte recuperarás lo que ya sabes sobre los temas, lo cual será la base de lo que aprenderás en cada lección.
- **Transitamos.** Es el momento en que analizas los contenidos conceptuales y procedimentales relacionados con el aprendizaje que se esté trabajando.
- **Integramos.** Pondrás en juego lo que has aprendido en toda la secuencia; además, aplicarás los conocimientos y habilidades que adquieras en las lecciones.

A lo largo de tu libro encontrarás interesantes contenidos, esquemas, fotografías, ilustraciones, figuras, gráficas, tablas, cápsulas y una diversidad de actividades que te ayudarán a desarrollar habilidades como calcular, inferir, comunicar, imaginar, estimar y deducir, así como actitudes de colaboración, respeto, investigación y autonomía.

Cada página de este libro es un reto para que puedas explorar ideas y conceptos matemáticos con los cuales podrás entender y poner en práctica procedimientos, plantear problemas y socializar diferentes estrategias de resolución.

Sé, pues, bienvenido a este curso en el que iniciarás tu viaje entre actividades que podrás llevar a cabo dentro y fuera de tu salón de clases; la resolución de problemas te ayudará a construir y fortalecer tus conocimientos matemáticos.

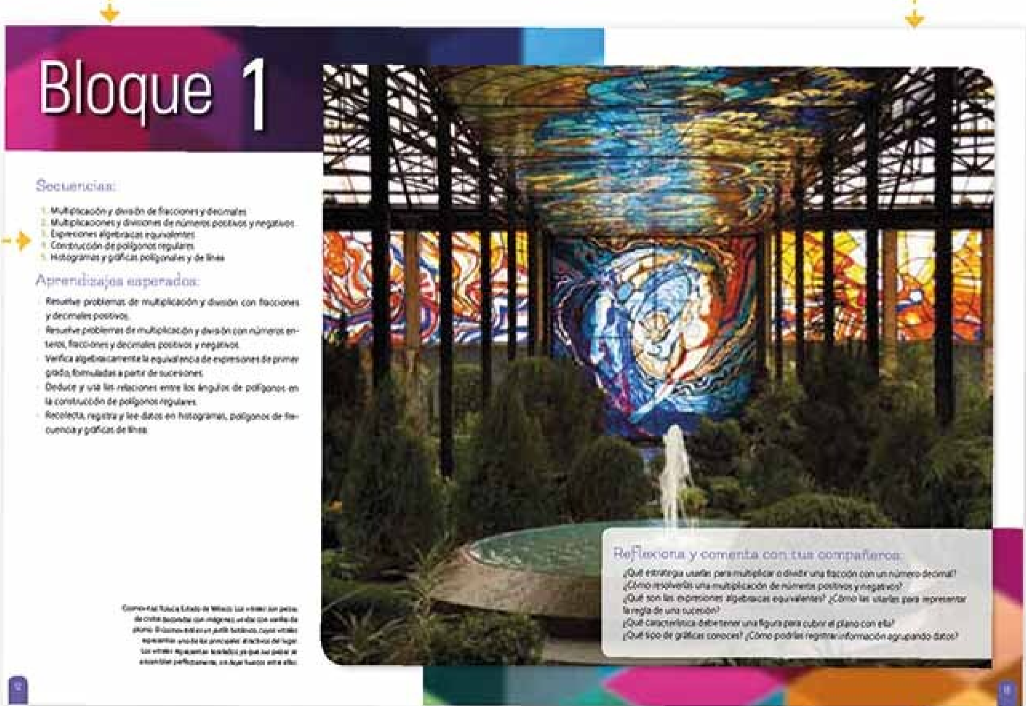
Te deseamos éxito en este nuevo ciclo escolar que comienzas.

Entrada de bloque

Al inicio de cada bloque encontrarás:

Nombre y número de bloque.

Imagen relacionada con los temas a desarrollar.


Bloque 1

Secuencias:

1. Multiplicación y división de fracciones y decimales
2. Multiplicaciones y divisiones de números positivos y negativos
3. Expresiones algebraicas equivalentes
4. Construcción de polígonos regulares
5. Histogramas y gráficas poligonales y de líneas

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de líneas.

Reflexiona y comenta con tus compañeros:

¿Qué estrategia usarías para multiplicar o dividir una fracción con un número decimal?
¿Cómo resolverías una multiplicación de números positivos y negativos?
¿Qué son las expresiones algebraicas equivalentes? ¿Cómo las usarías para representar la regla de una sucesión?
¿Qué característica debe tener una figura para cubrir el plano con ella?
¿Qué tipo de gráficas conoces? ¿Cómo podrías registrar información agrupando datos?

Listado de secuencias y aprendizajes esperados

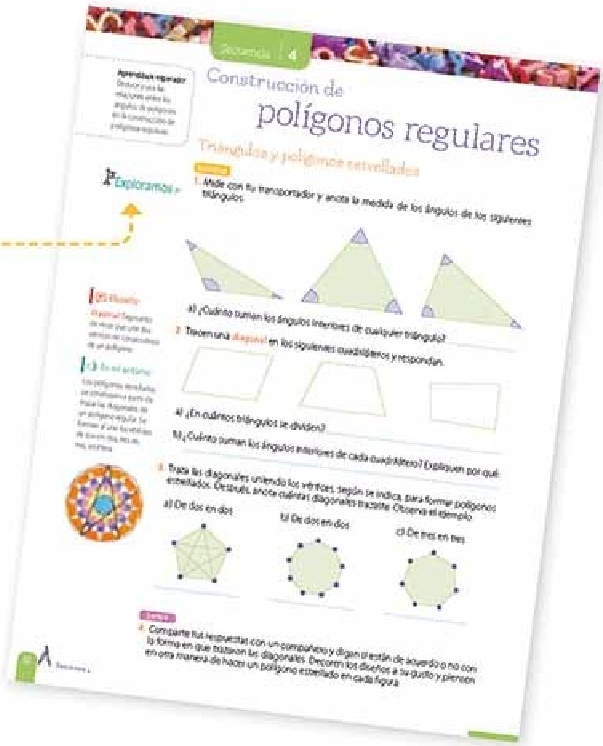
Preguntas de reflexión que te harán recuperar los conocimientos previos que utilizarás a lo largo del bloque. Estas preguntas podrás discutirlas con tus compañeros antes de responder.

Secuencias didácticas

El libro de texto se dividirá en **secuencias** que corresponden a los aprendizajes que debes adquirir. Las secuencias se desglosarán en varias **lecciones de trabajo**.

Exploramos ▶

Es una actividad inicial para que recuperes ideas y conocimientos previos. También representa una oportunidad para acercarte a los temas que estudiarás.


Secuencia 4

Construcción de polígonos regulares

Triángulos y polígonos estrellados

Exploramos

1. Mide con tu transportador y anota la medida de los ángulos de los siguientes triángulos.

a) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier triángulo?

2. Tracen una diagonal en los siguientes cuadriláteros y respondan.

a) ¿En cuántos triángulos se dividen?

b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada cuadrilátero? Expliquen por qué.

3. Traza las diagonales uniendo los vértices, según se indica, para formar polígonos estrellados. Después, anota cuántas diagonales trazaste. Observa el ejemplo.

a) De dos en dos b) De dos en dos c) De tres en tres

4. Comparte tus respuestas con un compañero y digan si están de acuerdo o no con la forma en que trazaron las diagonales. Decoren los diseños a su gusto y piensen en otra manera de hacer un polígono estrellado en cada figura.


Lección 4.1

Diagonales de polígonos de n lados

Transitamos

Propósito Aprenderás a calcular el número de diagonales de cualquier polígono.

1. Observen el polígono estrellado que trazaron unos estudiantes y respondan.

2. Tracen las diagonales necesarias en el siguiente pentágono regular para formar un polígono estrellado. Después, respondan.

3. Tracen todas las diagonales posibles en los siguientes polígonos irregulares.

a) Anoten la cantidad de diagonales que trazaron en cada figura.

Cuadrilátero: Hexágono: Octágono:

b) ¿Cuántas diagonales salen desde cada vértice en cada figura?

Cuadrilátero: Hexágono: Octágono:

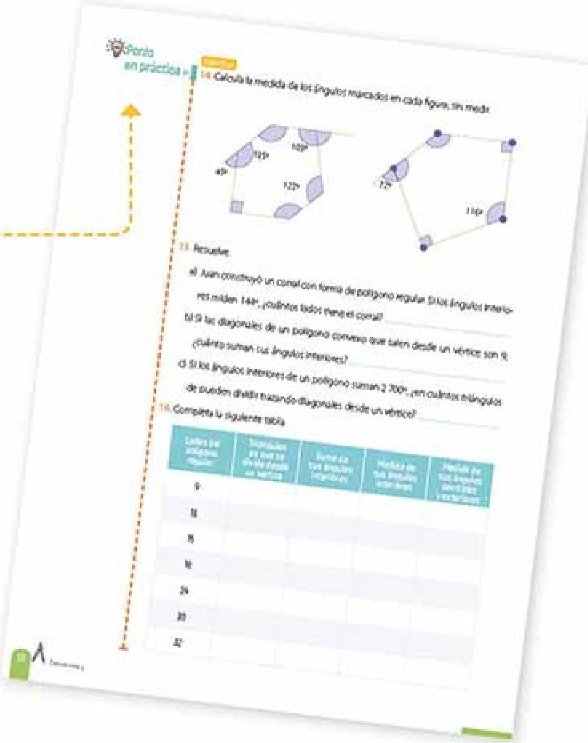
4. Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

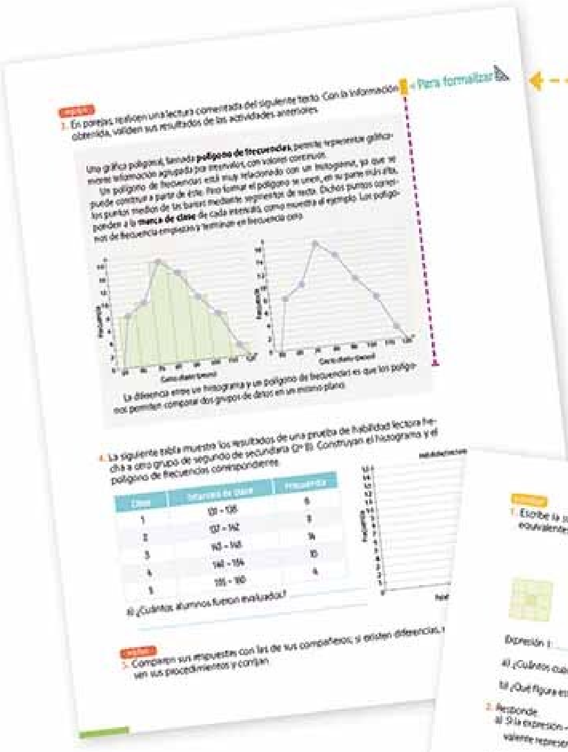
◀ Transitamos

En este momento encontrarás una diversidad de actividades que te ayudarán a entender los contenidos conceptuales y procedimentales relacionados con el aprendizaje que se esté trabajando.

Ponlo en práctica

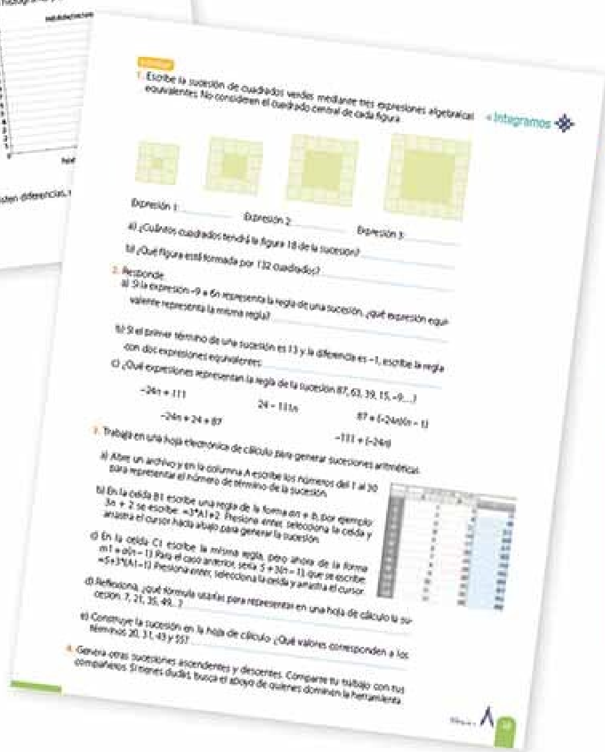
Es una sección de ejercitación que marcará el cierre de la lección. Encontrarás ejercicios para practicar el contenido que estudiarás en cada lección.





Para formalizar

En esta sección encontrarás una breve explicación de los contenidos conceptuales y procedimentales que están relacionados con las lecciones de la secuencia.



Integramos

En este cierre de secuencia encontrarás actividades en las que aplicarás los conocimientos y habilidades que adquieras en las lecciones.

En mi entorno

En esta cápsula encontrarás información en la que se explore los alcances de las Matemáticas en tu vida diaria.

En mi entorno

En el Palacio de La Alhambra, que está en la ciudad de Granada, España, las paredes y pisos están cubiertos por teselados. Busca en Internet información sobre el origen de éstos en dicha construcción y compártela con tus compañeros y con el profesor.

Glosario

Aquí encontrarás la definición de términos que te ayudarán a comprender el lenguaje matemático de manera simple pero precisa.

Glosario

Hectarea (ha). Unidad de medida de superficie que es igual a un cuadrado que mide 1 hm por lado.

Otra vista

En esta sección de información adicional conocerás increíbles datos curiosos que te harán reflexionar sobre las matemáticas.

Otra vista

Una multiplicación de números negativos puede considerarse como una "negación doble" que representa algo positivo. Por ejemplo, "es **imposible** ganar", representa **una negación** a la posibilidad de ganar. Pero si decimos: "**no** es **imposible** ganar", significa que ganar sí es posible, es decir, la doble negación se convierte en algo positivo.

Consulta en...

En esta cápsula encontrarás recomendaciones de recursos de consulta como: libros, videos e interesantes páginas de internet relacionados con los temas que estudiarás.

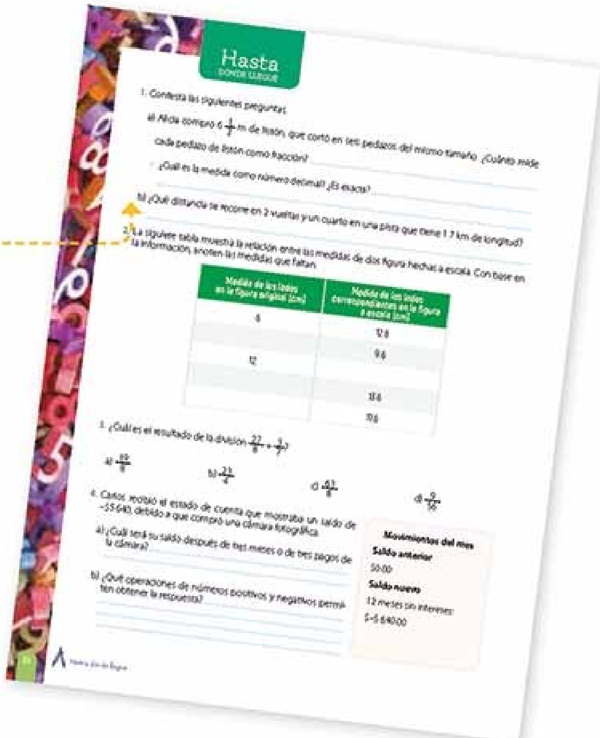
Consulta en...

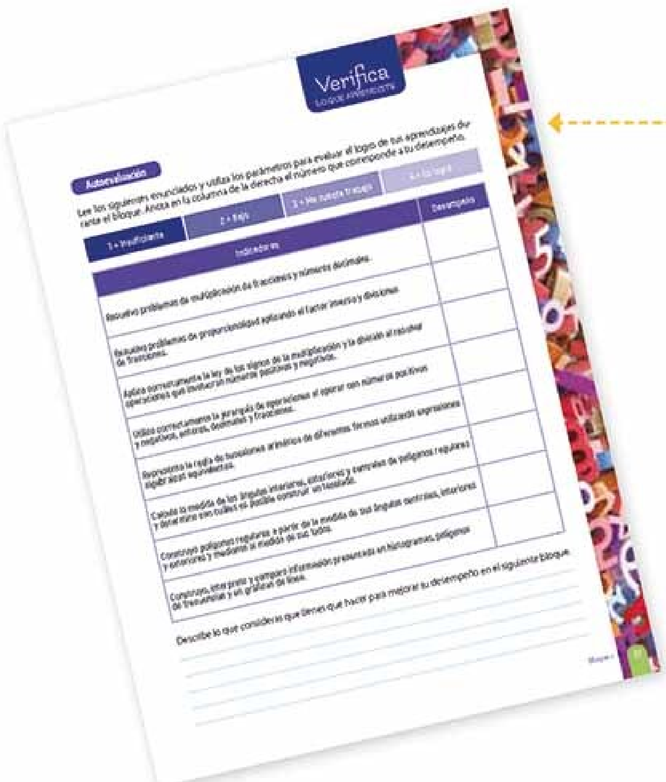
Visita la siguiente página electrónica: https://www.geogebra.org/m/NVYyMMkt, que muestra material interactivo que puedes manipular modificando los intervalos. Puedes sustituir los valores que muestra y crear tu propio histograma y polígono de frecuencias.

Secciones de evaluación

En este apartado realizarás pruebas que evaluarán tus conocimientos, habilidades y actitudes de tu pensamiento matemático.

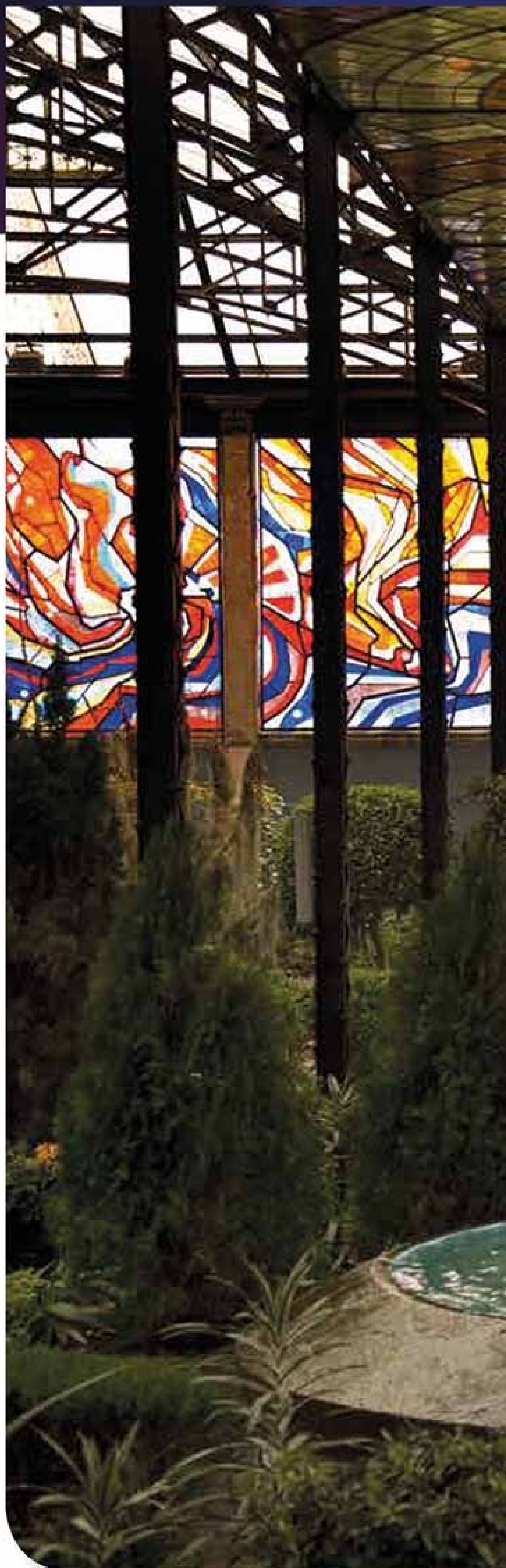
Hasta dónde llegué. Al final de cada bloque se encuentra este apartado en el que, mediante la resolución de ejercicios y problemas fortalecerás los contenidos matemáticos que trabajaste durante el bloque.





Verifica lo que aprendiste. Esta sección incluye un instrumento de **autoevaluación** que te ayudará a reconocer tus logros a lo largo del bloque.

Bloque 1



Secuencias:

1. Multiplicación y división de fracciones y decimales
2. Multiplicaciones y divisiones de números positivos y negativos
3. Expresiones algebraicas equivalentes
4. Construcción de polígonos regulares
5. Histogramas y gráficas polígonales y de línea

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Cosmovitral, Toluca, Estado de México. Los vitrales son piezas de cristal decoradas con imágenes, unidas con varillas de plomo. El cosmovitral es un jardín botánico, cuyos vitrales representan uno de los principales atractivos del lugar. Los vitrales representan teselados, ya que sus piezas se ensamblan perfectamente, sin dejar huecos entre ellas.

Reflexiona y comenta con tus compañeros:

- ¿Qué estrategia usarías para multiplicar o dividir una fracción con un número decimal?
- ¿Cómo resolverías una multiplicación de números positivos y negativos?
- ¿Qué son las expresiones algebraicas equivalentes? ¿Cómo las usarías para representar la regla de una sucesión?
- ¿Qué característica debe tener una figura para cubrir el plano con ella?
- ¿Qué tipo de gráficas conoces? ¿Cómo podrías registrar información agrupando datos?

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Multiplicación y división de fracciones y decimales

Arreglos en la casa

Lee la información y resuelve los problemas.

Exploramos

individual

Glosario

Pulgada. Unidad de medida del Sistema Inglés, que equivale a 2.54 cm.

1. Martín fue a la ferretería a comprar diversos materiales para hacer algunas reparaciones en su casa.

   a) Martín pidió $\frac{1}{8}$ de kg de clavos de $\frac{1}{2}$ pulgada. Si la báscula es digital y pesa en kilogramos, ¿cuánto tiene que marcar en este caso? __________

   b) Si compró $\frac{2}{3}$ de un tubo de cobre de 5 m de largo, ¿cuántos metros de tubo compró? __________ ¿La medida como número decimal es exacta? Explica por qué.

   ____

   c) En la ferretería venden botellas de $\frac{3}{4}$ de L de un removedor líquido de pintura. Si Martín compra 3 botellas, ¿cuántos litros de removedor son? __________

   d) Si compra 4 botes de pintura de 3.78 L cada uno, ¿cuántos litros de pintura son?

   ____

2. La siguiente imagen muestra un plano a escala de la pared que hizo Martín para diseñar una conexión de luz en una de las habitaciones. Considera que cada centímetro en el dibujo representa 50 cm en la realidad.

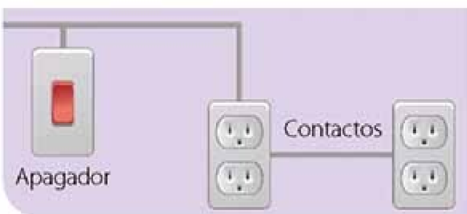


Figura 1.1.

   a) Anota la medida real del largo y alto de la pared, en metros:

   Largo: __________

   Ancho: __________

   b) ¿Qué hiciste para obtener las respuestas? __________

   c) Si la distancia real entre los dos contactos es de 2.3 m, ¿cuál es la distancia de éstos en el plano? Explica tu respuesta. __________

3. Con la coordinación del profesor, compara tus respuestas con el resto del grupo. Si hay diferencias, revisen hasta llegar a un acuerdo.

Multiplicación de fracciones y números decimales

Propósito Resolverás problemas que involucran multiplicaciones de fracciones y números decimales y operaciones combinadas.

Transitamos

pareja

1. Lean en pareja la información y resuelvan.

Juan Pablo es ciclista y como parte de su preparación, entrena en el autódromo **Hermanos Rodríguez de la Ciudad de México**, cuyo circuito tiene una longitud de 4.304 km.

La tabla muestra la distancia que recorre Juan Pablo al dar cierto número de vueltas al circuito. Anoten los valores que faltan.

Número de vueltas	2	5	10	14	19
Longitud (km)					

a) ¿Qué operaciones efectuaron para completar la tabla? ______

b) ¿Qué tipo de relación representan los valores de la tabla? Expliquen su respuesta. ______

c) Si un corredor entrena en el mismo circuito y en un día dio $1\frac{1}{2}$ vueltas, ¿qué distancia recorrió? ______

d) ¿Qué procedimiento siguieron para responder? ______

e) Completen la tabla que muestra la distancia que se recorre al darle al cierto número de vueltas al circuito.

Número de vueltas	$\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{3}$	14	19
Longitud (km)					

f) ¿Qué tipo de números usaron para completar los datos de la tabla? ¿En todos los casos fueron los mismos? ¿Por qué? ______

2. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Comenten sus estrategias al resolver multiplicaciones de números decimales y fracciones. Si tienen dudas, coméntenlas con su profesor.

En mi entorno

En el autódromo Hermanos Rodriguez cada año se lleva a cabo el Gran premio de México, carrera de automóviles de Fórmula 1. En el año 2017, recibió un reconocimiento como el mejor gran premio de Fórmula 1 del año.

equipo

3. Lean en equipo la siguiente información y hagan lo que se indica.

El movimiento de los planetas alrededor del Sol se conoce como traslación. Un año en la Tierra es igual a 365 días, que es el tiempo que tarda el planeta en dar la vuelta alrededor del Sol.
La tabla muestra el número aproximado de años terrestres que tardan los planetas del Sistema Solar en completar su movimiento de traslación alrededor del Sol.

Planeta	Mercurio	Venus	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Tiempo del movimiento de traslación (años terrestres)	0.25	0.62	1.9	11.9	29.7	84.3	164.8

a) Si en la Tierra pasa un año medio, ¿cómo pueden conocer el tiempo en años terrestres que pasa en cada planeta? ____________________

____

b) ¿Cómo pueden calcular el tiempo para *n* número de años que pasan en la Tierra?

____

____

c) Cada estación del año: primavera, verano, otoño e invierno, dura $\frac{1}{4}$ de año.

Completen la tabla para saber cuál sería la duración de cada estación del año en cada planeta en tiempos o años terrestres.. La mitad del equipo opere con fracciones y la otra mitad con decimales. En el caso de las fracciones, simplifiquen el resultado.

Planeta	Mercurio	Venus	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Duración de una estación (años terrestres)							

d) Discutan en equipo, con qué tipo de números es mejor operar en cada caso y por qué. Lleguen a acuerdos.

Otra vista

En muchas ocasiones se usa un punto (•) para representar el signo de una multiplicación.

4. Calculen las siguientes operaciones. Operen con los números que consideren más adecuados, según sus acuerdos.

a) $\frac{2}{5} \cdot 0.62 =$ ________ c) $\frac{7}{4} \cdot 1.9 =$ ________ e) $\frac{5}{6} \cdot 11.9 =$ ________

b) $\frac{5}{4} \cdot 0.25 =$ ________ d) $\frac{7}{12} \cdot 1.9 =$ ________ f) $\frac{3}{2} \cdot 29.7 =$ ________

grupo

5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros, de acuerdo con las indicaciones de su profesor. Expliquen qué números usaron para resolver las operaciones.

pareja

6. Resuelvan.

Alfredo vende materiales para la construcción. Para transportar el material tiene dos camionetas: una con capacidad de 2.5 toneladas y otra de 1.2 toneladas (t), como las que muestra la imagen.

a) En la camioneta grande transportan varilla a $\frac{3}{4}$ de su capacidad para entregar a un cliente.

- Calculen la masa de la varilla operando con fracciones: ____________________

- Calculen la masa de la varilla operando con decimales: ____________________

b) En la camioneta más chica transportan bultos de cemento que ocupan $\frac{2}{3}$ de su capacidad. Calculen la carga como fracción y como número decimal.

Fracción: ______________ Número decimal: ______________

c) ¿Con qué tipo de números es mejor operar en cada caso? ¿Por qué? __________

d) En la entrega de un pedido transportaron el material en las dos camionetas y dieron varias vueltas. La camioneta grande la llenaron $1\frac{1}{2}$ veces con bultos de cemento y la camioneta chica, 2 y $\frac{5}{6}$ veces con arena y grava.

- ¿Cuántas toneladas de material entregaron en total? ________. Describan las operaciones que emplearon para resolver el problema. ____________________

e) En la camioneta de 1.2 t transportan varilla y cemento, la varilla representa $\frac{1}{6}$ de la carga que soporta la camioneta y lleva $\frac{3}{5}$ de t de cemento.¿Cuál de las siguientes operaciones permite conocer la masa que transporta la camioneta? Expliquen su elección. ____________________

$1.2 - (\frac{1}{6} \cdot 1.2 + \frac{3}{5})$ $\qquad$ $\frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot 1.2$ $\qquad$ $(\frac{3}{5} + \frac{1}{6}) \cdot 1.2$

f) ¿Qué masa transporta la camioneta? ____________________

7. Comparen sus resultados con los de otros equipos. Discutan sobre la estrategia empleada por cada pareja y cómo pueden resolver operaciones combinadas de fracciones y números decimales.

individual

Para formalizar

8. Lee la siguiente información. A partir de ésta, revisa tus resultados de las actividades previas, para validar tus procedimientos.

Para resolver multiplicaciones de números decimales y fracciones, se pueden efectuar los siguientes procedimientos:

- Se multiplica el número decimal por el numerador y el resultado se divide por el denominador. Por ejemplo:

  $3.2 \cdot \frac{3}{4} = 3.2 \cdot 3 \div 4 = 2.4.$ $\qquad$ $1.3 \cdot \frac{2}{3} = 1.3 \cdot 2 \div 3 = 0.866\ldots$

  Aunque en muchos casos el resultado es un número con extensión decimal infinita:

- Se puede operar con fracciones: $1.3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$
- O se puede operar con decimales: $3.25 \cdot \frac{3}{4} = 3.25 \cdot 0.75 = 2.4$

  Es importante identificar los números involucrados y si se requiere un resultado exacto o una aproximación, para decidir con cuales operar.

  Cuando se resuelven operaciones combinadas que involucran fracciones y decimales, se opera según lo anterior, atendiendo la jerarquía de operaciones; es decir, se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis, cuando los hay: primero las multiplicaciones y divisiones; y después, las sumas y restas.

  Por ejemplo:

  $$4.6 \cdot \frac{3}{4} + 1.3 \cdot (\frac{2}{3} + 2.1) = 4.6 \cdot 0.75 + \frac{13}{10} \cdot (\frac{2}{3} + \frac{21}{10}) = \frac{345}{100} + \frac{13}{10} \cdot \frac{83}{30} =$$
  $$\frac{345}{100} + \frac{1079}{300} = \frac{2114}{300}$$

9. Resuelve las siguientes operaciones aplicando la jerarquía de operaciones.

a) $\frac{3}{4} + 1.3 \cdot \frac{9}{8} =$

b) $\frac{4}{7} \cdot 1.4 - 0.6 =$

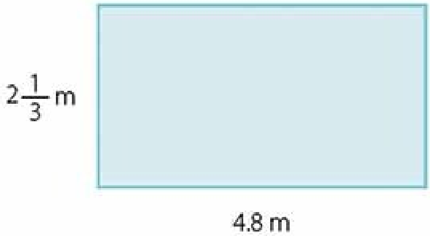
c) $2 \times (\frac{1}{3} \times 0.9 + \frac{4}{5} \times 4.2) =$

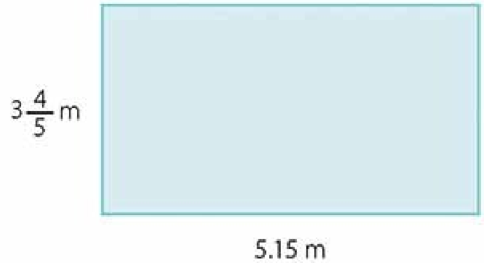
d) $\frac{7}{9} \cdot 1.6 + 0.2 \cdot \frac{6}{8} =$

10. Con el apoyo del profesor, validen sus respuestas con el resto del grupo. Registren sus conclusiones acerca de las ventajas o desventajas de operar con fracciones o números decimales y en qué casos conviene uno u otro tipo de números.

individual

11. Calcula el área de los siguientes rectángulos.





Área = ________ Área = ________

12. Estima el resultado de las siguientes multiplicaciones, sin hacer operaciones escritas.

a) $\frac{5}{9} \cdot 3.9 =$ ________ b) $8.3 \cdot \frac{3}{2} =$ ________ c) $0.9 \cdot \frac{9}{11} =$ ________

13. Lee la información y resuelve.

La Estrella de Puebla es una rueda de la fortuna, su altura es de 80 m, con un radio aproximado de 39 m, y 54 góndolas que giran lentamente. Es considerada la rueda de la fortuna más alta de América Latina.

a) ¿Qué distancia recorre la rueda de la fortuna al dar una vuelta?

____

b) Completen la tabla para conocer la distancia que recorre la rueda de la fortuna al dar el número de vueltas que se indica.

Número de vueltas	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{8}$
Distancia (m)					

14. Resuelve.

a) Una alberca con forma de prisma rectangular tiene una base que mide 8.4 m de largo por $3\frac{1}{2}$ m de ancho y tiene una altura de 1.85 m. Si se encuentra llena a $\frac{2}{3}$ de su capacidad, ¿cuántos metros cúbicos de agua contiene? ________

b) Para hacer un instalación de agua, Pedro utilizó un tubo de cobre de 1.45 m, $3\frac{1}{2}$ tubos de 0.9 m y un tubo más de $\frac{3}{4}$ m. Si el metro de tubo cuesta \$75.50, ¿cuál es el costo del tubo que utilizó? ________

Ponlo en práctica

Otra vista

Recuerda que para calcular la distancia que recorre la rueda al dar una vuelta, se multiplica pi (3.14) por la medida del diámetro.

Rueda de la fortuna, Estrella de Puebla.

Aplicación del factor inverso de proporcionalidad

Propósito Calcularás las medidas de figuras hechas a escala o valores en una relación de proporcionalidad directa, a partir del factor de proporcionalidad y su recíporoco o factor inverso.

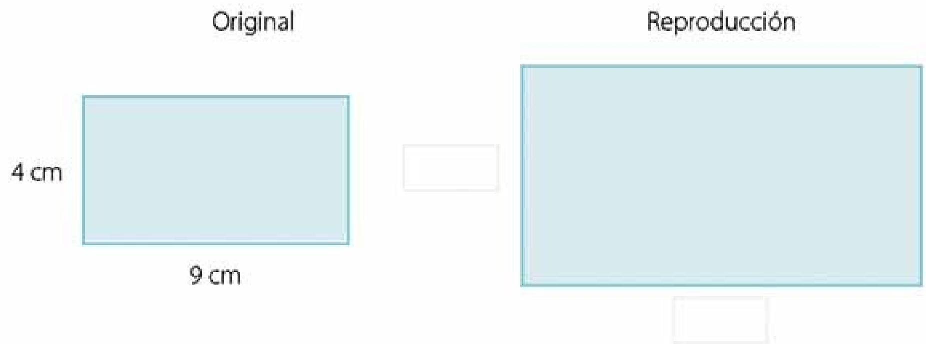
Glosario

Factor de escala. Valor por el que se multplican las medidas de una figura para obtener las medidas de su reproducción.

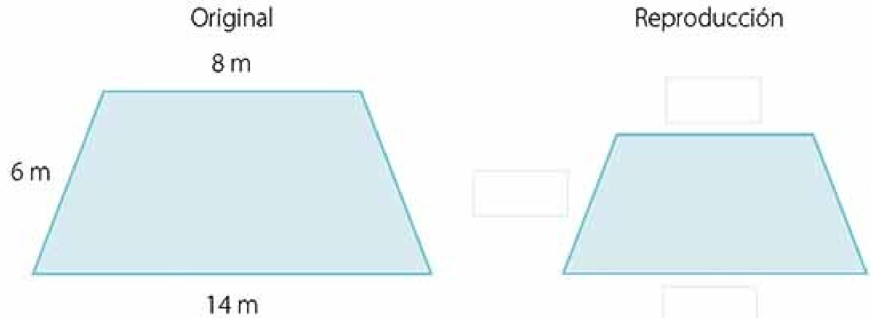
individual

1. Observa el **factor de escala** en cada figura y determina las medidas correspondientes. Después, responde.

a) Factor de escala: 3



b) Factor de escala: $\frac{3}{4}$



c) En el caso del rectángulo, ¿cómo puedes obtener las medidas de la figura original, a partir de las medidas de la reproducción? ______________________

____

d) Si la reproducción fuera el rectángulo original, ¿cuál sería el factor de escala para obtener el otro rectángulo? ¿Cómo lo determinaste? ______________________

____

e) En caso del trapecio, ¿cómo puedes obtener las medidas originales, a partir de las medidas de la reproducción? Justifica tu respuesta. ______________________

____

2. Explica a otros compañeros y escribe en tu cuaderno el razonamiento que seguiste para responder. ¿Qué relación hay entre el factor de escala y los valores que permiten obtener la figura original, a partir de su reproducción?

pareja

3. En parejas resuelvan los siguientes problemas.

20 cm

15 cm

Mariana imprimió la siguiente fotografía en dos diferentes tamaños. En una primera, pidió que la impresión fuera 3 veces mayor al tamaño original. Como la fotografía le pareció muy grande, pidió una segunda impresión cuyas medidas fueran $\frac{2}{3}$ del tamaño de la primera impresión.

a) Anoten las medidas de cada impresión:

Impresión 1: ____________________

Impresión 2: ____________________

b) Si se consideran las medidas de la fotografía original para la segunda impresión, ¿qué factor de escala se tiene que aplicar? Expliquen su respuesta. ____________________

Mariana dice que para obtener las medidas de la figura original, a partir de la primera impresión, se pueden dividir entre 3 o multiplicar por $\frac{1}{3}$.

d) ¿Están de acuerdo con Mariana? ¿Qué número se obtiene al multiplicar $3 \cdot \frac{1}{3}$?

____

e) Escriban dos diferentes operaciones para obtener las medidas de la fotografía original a partir de la primera y la segunda impresión:

	Figura orginal	Figura original
Impresión 1		
Impresión 2		

f) Completen las multiplicaciones para obtener las medidas de la primera impresión a partir de la segunda, escriban el factor correspondiente como fracción.

Largo: ____________________ Ancho: ____________________

g) ¿Cuál es el resultado de multiplicar $\frac{2}{3}$ por el número que determinaron en las operaciones anteriores?

____

4. Discutan las siguientes preguntas con otros compañeros. ¿Qué relación hay entre el factor de escala y el número por el que se multiplica para regresar a la figura original? ¿Con qué multiplicación pueden obtener el mismo resultado de la división $\frac{a}{2}$? Con el apoyo del profesor, registren sus acuerdos.

equipo

5. Resuelvan en equipo el siguiente problema.

En una panadería venden, en promedio, 8 bolillos por cada 6 panes de dulce.

a) Calcula cuántos panes de dulce se venderían en caso de que se venda el número de bolillos indicado.

92 bolillos: ________ panes de dulce   108 bolillos: ________ panes de dulce

b) Considerando que las piezas de pan de dulce vendidas dependen del número de bolillos que se venden, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? ________

Glosario

Constante de proporcionalidad. En una relación de proporcionalidad directa, valor por el que se multiplica una variable (*x*) para obtener la otra variable (*y*).

c) ¿Qué factor permite obtener el número de bolillos a partir de las piezas de pan de dulce? Justifiquen su respuesta.

____

d) ¿Qué relación observan entre ambos factores? ________

____

e) Si en un día se venden 84 piezas de pan de dulce, ¿cuántos bolillos se vendieron? ¿Y si venden 102 panes de dulce? ________

6. Analicen la información y hagan lo que se pide.

Rubén camina de la mano con su hijo Néstor de 5 años de edad. Durante la caminata, Rubén notó que, en promedio, por cada cinco pasos que daba su hijo, él daba dos.

a) Si Rubén da 6 pasos, ¿cuántos pasos da su hijo? ________

b) Si Néstor da 30 pasos, ¿cuántos da su papá? ________

c) ¿Qué hicieron para responder las preguntas anteriores? ________

____

d) Completen la tabla a partir de la información anterior.

Pasos de Rubén		7			35
Pasos de Néstor	10		25	60	

e) ¿Qué factor permite obtener el número de pasos de Néstor a partir de los pasos que da Rubén? ________

f) ¿Qué factor permite obtener el número de pasos de Rubén a partir de los pasos de Néstor? ________

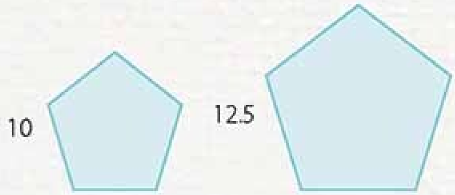
7. Compartan sus resultados con otros equipos. Comenten la relación de los factores que permiten obtener los valores de la tabla y qué similitud tienen con los factores de escala de las actividades anteriores.

pareja

8. Reúnete con un compañero y hagan una lectura comentada de la siguiente información.

Para formalizar

En figuras hechas a escala se conoce como **factor de escala inverso** o **factor recíproco, al valor** que permite obtener las medidas de una figura original, a partir de las medidas de su reproducción.



Por ejemplo, para obtener las medidas de la reproducción del pentágono anterior, se aplicó un factor de escala: $\frac{5}{4}$, porque $10 \cdot \frac{5}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$

El factor recíproco, es decir, el número que permite obtener la figura original a partir de su reproducción es $\frac{4}{5}$, porque $12.5 \times \frac{4}{5} = \frac{125}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{500}{50} = 10$

Podemos concluir que el recíproco de $\frac{n}{m}$ es $\frac{m}{n}$.

Al multiplicar el factor de escala y su recíproco el resultado es 1, es decir, un número p es recíproco de r si que cumple que $p \times r = 1$.

De la misma manera, en relaciones de proporcionalidad directa de la forma: $y = kx$, donde k representa la constante de proporcionalidad, para obtener los valores de x a partir de y, se multiplica por el recíproco de k, es decir, $x = y\frac{1}{k} = \frac{y}{k}$

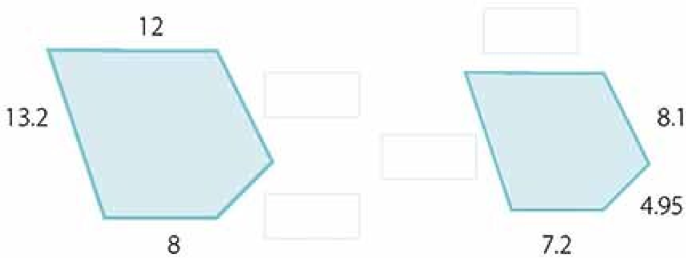
individual

Ponlo en práctica

9. En cada figura, determina el factor inverso o recíproco y anota las medidas que faltan

Factor de escala: $\frac{9}{10}$

Factor recíproco:



10. La siguiente tabla muestra una relación de proporcionalidad directa, complétala con los datos de que faltan.

x	6		28			63
y	9	16		48	60	

11. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Escúchalos con respeto e intercambien ideas sobre el trabajo que hicieron en la lección.

Problemas de división de fracciones

Propósito Resolverás problemas que implican resolver divisiones de fracciones.

individual

1. Analiza la información y resuelve.

a) Paulina quiere repartir una botella de agua de dos litros en 10 vasos con la misma cantidad. ¿Qué operación permite saber cuánta agua contendrá cada vaso? ______ ¿Qué cantidad de agua contendrá cada vaso? ______

b) Si de una botella de agua de 3 L se llenan vasos de $\frac{1}{8}$ de L, ¿cuántos vasos se pueden llenar? Escribe la división que permite obtener el resultado. ______

c) A partir de lo anterior, completa la siguiente multiplicación: $3 \cdot$ ______ = ______ .

d) ¿Qué relación hay entre el dividendo y el factor de la multiplicación? ______

______

e) De una botella de $3\frac{3}{5}$ L de agua se quieren llenar vasos de $\frac{2}{10}$ de L. Para saber cuántos vasos se pueden llenar, resuelve la división y la multiplicación que permite comprobar el resultado.

División: $\frac{18}{5} \div \frac{2}{10} =$ ______ .

Multiplicación para comprobar el resultado: ______ $\cdot \frac{2}{10} = \frac{18}{5}$

¿Podrías obtener el resultado de la división por medio de una multiplicación? ¿Cuál? ______

Otra vista

En una división: Cociente × divisor = dividendo.

2. Ahora, resuelve los siguientes problemas. En cada caso, escribe la operación de fracciones que permite obtener los resultados.

a) De un paquete de café en grano de $5\frac{1}{4}$ kg se van a llenar bolsas de $\frac{3}{8}$ de kg.

¿Cuántas bolsas se pueden llenar? ______

Operación: $\frac{21}{4} \div \frac{3}{8} =$ ______ Comprobación: ______ $\cdot \frac{3}{8} =$ ______ $= \frac{21}{4}$

b) Un terreno de forma rectangular mide $\frac{2}{3}$ de hm de largo y ocupa un área de $\frac{2}{5}$ ha.

¿Cuántos hectómetros mide de ancho? ______

Operación: ______ ÷ ______ = ______ Comprobación: ______ $\cdot \frac{2}{3} =$ ______ $= \frac{2}{5}$

Glosario

Hectarea (ha). Unidad de medida de superficie que es igual a un cuadrado que mide 1 hm por lado.

pareja

3. Analicen en parejas la información y resuelvan.

Como saben, en una relación de proporcionalidad cuya expresión es de la forma $y = xk$, para obtener los valores de x a partir de y, puede dividir los valores de y entre la constante, esto es, $x = y/k$.

a) En la siguiente tabla, identifiquen la constante o factor de proporcionalidad y apliquen el procedimiento anterior para determinar los valores de x.

x	7					
y	42	69	86	130	144	210

b) De acuerdo con lo visto en la lección anterior, ¿de qué otra forma pueden obtener los valores de x? ____________________

4. La tabla muestra el tiempo de llenado de una cisterna con un chorro de agua que cae de manera constante. Determinen la constante y completen la tabla.

Tiempo (seg)	5		21			80
Cantidad de agua (L)	9	15		85	124	

a) ¿Qué procedimiento siguieron para obtener los valores de la variable dependiente (y)? ____________________

____

b) Describan dos formas de obtener el tiempo a partir de la cantidad de litros?

____

____

c) ¿Qué relación observan entre la multiplicación y la división con números recíprocos? ____________________

____

5 . A partir de lo visto en las actividades previas, resuelvan las siguientes divisiones de fracciones. Simplifiquen los resultados.

a) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} =$

c) $\frac{19}{6} \div \frac{5}{8} =$

b) $\frac{6}{5} \div \frac{10}{7} =$

d) $\frac{24}{9} \div \frac{1}{3} =$

6. Compartan sus respuestas con las de otros compañeros y su estrategia de solución. Si existen diferencias, comprueben sus resultados con una multiplicación. Con el apoyo de profesor, establezcan en grupo un criterio para resolver divisiones de fracciones. Registren sus acuerdos en su cuaderno.

pareja

Para formalizar

7. Analicen en parejas la información. Después, retomen sus conclusiones para validarlas y de ser necesario corrijan.

Como vieron en la lección anterior, los números recíprocos son aquellos que al multiplicarse entre sí, el resultado es igual a 1. Por ejemplo, 2 y $\frac{1}{2}$, son números recíprocos porque $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

De lo anterior podemos establecer que dividir entre un número $\frac{n}{m}$ es igual a multiplicar por su recíproco; es decir, por $\frac{m}{n}$, como se muestra enseguida:

$$8 \div 2 = 4 \qquad 8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Así se establece que, para dividir entre una fracción $\frac{n}{m}$, se multiplica por su recíproco $\frac{m}{n}$. Por ejemplo, $\frac{21}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{21}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{168}{12} = 14$.

Ponlo en práctica

individual

8. Resuelve los siguiente problemas.

a) Un autobús de pasajeros recorre una ruta de $4\frac{4}{5}$ km. Si tiene paradas asignadas cada $\frac{3}{8}$ de km, ¿cuántas paradas realiza? __________

b) José trota a un promedio de $\frac{1}{6}$ de km por minuto. Si su meta de hoy es correr $3\frac{1}{2}$ kilómetros, ¿en cuántos minutos los recorrerá? __________

c) Un tinaco se encuentra a $\frac{4}{5}$ de su capacidad. Si se vacía a razón de $\frac{1}{8}$ de su capacidad por hora, ¿en cuánto tiempo quedará completamente vacío?

____

Consulta en...

Ingresa a https://www.thatquiz.org/es-3/matematicas/fraccion/ elige las opciones "Dividir" y "Fracciones" y resuleve los ejercicios para practicar.

9. Completa las siguientes multiplicaciones.

a) $\frac{27}{22} \cdot$ ______ $= \frac{9}{11}$

c) $\frac{35}{9} \cdot$ ______ $= \frac{7}{3}$

b) $\frac{11}{12} \cdot$ ______ $= \frac{11}{8}$

d) $\frac{48}{7} \cdot$ ______ $= \frac{12}{7}$

10. Valida tus resultados con tu profesor. En caso de que tengas dudas, pide que te ayuda para aclararlas.

individual

Integramos

1. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $0.73 \times \frac{6}{5} =$ ______

c) $3.7 - \frac{12}{9} \times \frac{5}{8} =$ ______

b) $1.2 \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{3} =$ ______

d) $2.9 \times \frac{3}{7} + 1.2 \times \frac{1}{4} =$ ______

2. Una ciclista recorre 3 km en 9 minutos, es decir, $\frac{3}{9}$ km/min.

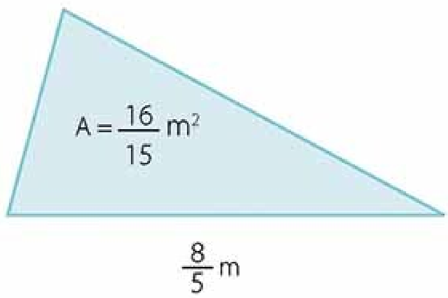
a) Si mantiene la misma velocidad de manera constante, ¿qué distancia recorre en 15 minutos? ______

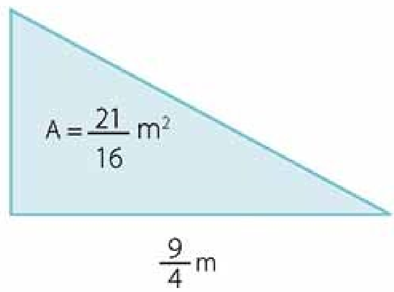
b) ¿En cuánto tiempo recorrerá 14 km? Explica tu respuesta. ______

3. Calcula la altura de los siguientes triángulos, a partir de la medida de su base y su área.

a) Altura = ______

b) Altura = ______





4. Resuelve las divisiones de fracciones.

a) $\frac{3}{7} \div \frac{7}{9} =$

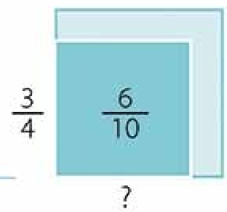
c) $\frac{13}{8} \div \frac{2}{5} =$

b) $\frac{5}{2} \div \frac{1}{6} =$

d) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{6} =$

5. Analiza la información y resuelve los problemas.

Del siguiente cuadrado se cortaron $\frac{6}{10}$. Si se tomaron $\frac{3}{4}$ de un lado, ¿qué fracción se cortó del otro lado? ______



6. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En caso de diferencias, comenten sus procedimientos en busca de los posibles errores, si es necesario, corrige.

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Multiplicaciones y divisiones de números positivos y negativos

Temperaturas bajo cero

Exploramos

individual

1. Lee la información y resuelve.

a) Si en un lugar la temperatura a las 6:00 a.m. era de –4 °C y a las 14:00 p.m. llegó a 11 °C, ¿cuántos grados aumentó? __________

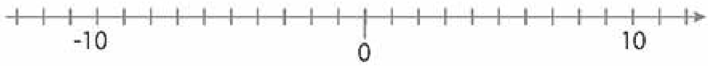
b) En otra ciudad la temperatura a la media noche era de 5 °C y para el amanecer había descendido 9 °C. ¿Cuál era la temperatura al amanecer? __________

c) ¿Qué operaciones hiciste para responder las preguntas anteriores? __________

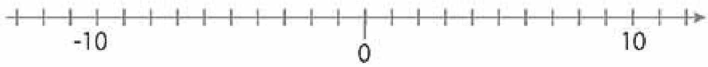
____

2. Representa las siguientes operaciones de números positivos y negativos en la recta numérica y resuélvelas.

a) 7 + (–8) = ______

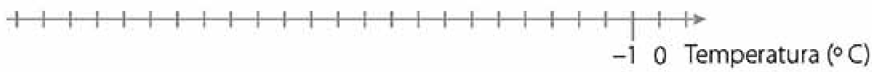


b) 2 – (–5) = ______



3. Representen los problemas en la siguiente recta y resuelvan.

a) En la ciudad de Nueva York la temperatura era de 0 °C y disminuyó 2 °C cada hora, durante 4 horas seguidas. ¿A qué temperatura llegó? __________



¿Con qué operación podrías representar la situación? __________

b) En otra ciudad la temperatura disminuyó de 0 °C a –9 °C durante tres horas. Si disminuyó de la misma forma durante las tres horas, ¿cuál era la temperatura después de la primera hora? __________

¿Con qué operación podrías resolver la situación? __________

pareja

4. Al terminar, compara tus respuestas con las de un compañero. En los casos donde no coincidan, expliquen por qué eligieron esa operación y cómo hicieron para hallar la respuesta.

Reglas para multiplicar números positivos y negativos

Propósito Conocerás las reglas para multiplicar números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos.

◂ Transitamos

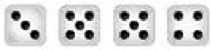
pareja

Néstor y sus primos juegan con cuatro dados legales de seis caras y dos tarjetas, como las que se muestran. Por turnos, cada uno lanza todos los dados y suma los puntos que obtiene, positivos o negativos, según la tarjeta que toma al azar.

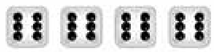
1. Observen en pareja los puntos en los dados que obtuvo cada primo y sumen para obtener el total.

a) Carlo obtuvo la tarjeta "Puntos negativos" y 

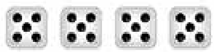
Suma: ______ + ______ + ______ + ______ = ______ puntos

b) Emmanuel sacó la tarjeta "Puntos positivos" y 

Suma: ______ + ______ + ______ + ______ = ______ puntos

c) Emiliano volteó la tarjeta "Puntos positivos" y 

Suma: ______ + ______ + ______ + ______ = ______ puntos

d) Néstor sacó la tarjeta "Puntos negativos y 

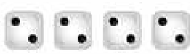
Suma: ______ + ______ + ______ + ______ = ______ puntos

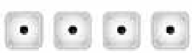
e) ¿Qué operación simplificada permite sumar los puntos de Emiliano? ______

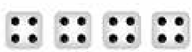
f) ¿Qué operación simplificada permite sumar los puntos de Néstor? ______

2. Representen como una multiplicación los siguientes resultados del juego.

a) Tarjeta: "Puntos positivos"; dados:  Multiplicación: ______

b) Tarjeta: "Puntos negativos"; dados:  Multiplicación: ______

c) Tarjeta: "Puntos negativos"; dados:  Multiplicación: ______

d) Tarjeta: "Puntos positivos": dados:  Multiplicación: ______

e) ¿Qué número: positivo o negativo tiene el resultado de multiplicar dos números positivos? ______

f) ¿Y cuál es el tipo de número: positivo o negativo del resultado de multiplicar un número positivo por uno negativo? ______

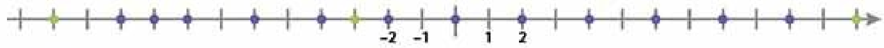
3. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros. Comenten sobre los resultados de multiplicar números positivos y negativos y juntos establezcan una regla a partir de la actividad anterior.

equipo

4. Formen equipos para resolver las siguientes actividades.

Una forma de representar y justificar la multiplicación de números positivos y negativos es mediante los siguientes procedimientos.

a) Imaginen que una persona realiza cinco saltos consecutivos de dos unidades a la derecha a partir del cero. Representen los saltos en el plano cartesiano.



b) ¿Qué multiplicación representa la situación anterior? ______________________

____

____

c) ¿Qué multiplicación representa 8 saltos de 3 unidades a la derecha? __________

____

____

d) ¿El producto de multiplicar dos números positivos es positivo o negativo? _____

____

____

5. Ahora, consideren cuatro saltos de tres unidades, a partir del cero, a la izquierda, es decir, saltos de –3 unidades, y represéntenlos en la siguiente recta numérica.

a) Si un salto a la izquierda es igual a $1 \times (-3)$, ¿cuál es el resultado? __________

b) ¿Qué multiplicación representa los cuatro saltos de -3 unidades? __________

____

____

c) ¿Cuál es el resultado de la multiplicación? ______________________

d) ¿A qué punto se llega si se dan 8 saltos de –4 unidades? ¿Qué multiplicación representa la situación?

e) ¿Cuál es el resultado de multiplicar un número positivo por uno negativo? ¿Coinciden los resultados con las conclusiones que obtuvieron antes? ________

____

pareja

6. Resuelvan la siguiente sucesión de multiplicaciones y analicen los resultados. Inicien hacia abajo.

$2 \times 4 =$ ________	$2 \times 1 =$ ________	$2 \times (-2) =$ ________
$2 \times 3 =$ ________	$2 \times 0 =$ ________	$2 \times (-3) =$ ________
$2 \times 2 =$ ________	$2 \times (-1) =$ ________	$2 \times (-4) =$ ________

a) ¿Qué regularidad observan? ________

Como saben, en una multiplicación el orden de los factores no altera el producto, es decir, $a \times b = b \times a$.

b) A partir de los resultados anteriores, cuál es el resultado de multiplicar -2×4?

____

c) ¿Qué tipo de número tiene el resultado de multiplicar un número negativo por una positivo? ________

d) Consideren lo anterior y completen la siguiente sucesión de multiplicaciones.

$-2 \times 4 =$ ________	$-2 \times 1 =$ ________	$-2 \times (-2) =$ ________
$-2 \times 3 =$ ________	$-2 \times 0 =$ ________	$-2 \times (-3) =$ ________
$-2 \times 2 =$ ________	$-2 \times (-1) =$ ________	$-2 \times (-4) =$ ________

e) Describan la regularidad que observan. ________

____

7. Consideren las regularidades encontradas y resuelvan las siguientes multiplicaciones.

$4 \times (-5) =$ ____	$2 \times (-9) =$ ____	$-1 \times (-2) =$ ____	$-3 \times (-2) =$ ____
$6 \times (-7) =$ ____	$4 \times (-9) =$ ____	$-6 \times (-2) =$ ____	$-10 \times (-5) =$ ____

a) De acuerdo con los resultados anteriores, ¿qué tipo de número: positivo o negativo tiene la multiplicación de dos números negativos? ________

8. Compartan sus resultados con los de otras parejas. ¿Qué sucede al multiplicar dos números un positivos o dos números negativos? ¿Y al multiplicar un número positivo por uno negativo y viceversa? Busquen el apoyo del profesor para validar sus conjeturas.

pareja

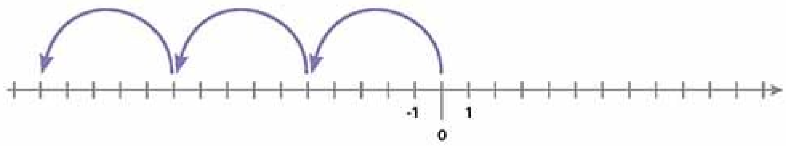
9. Analicen, en parejas, la siguiente situación para entender la regla para multiplicar números positivos y negativos.

Consideren que cada instrucción representa un movimiento sobre la recta numérica, a la derecha o a la izquierda, a partir del cero, de acuerdo con lo siguiente:

Sí = positivo (+) No = negativo (–)

Avanzar = moverse a la derecha (+) Retroceder = moverse a la izquierda (–)

Por ejemplo, "sí retrocedí 3 veces 5" significa moverse 15 lugares a la izquierda del cero y es igual a "Sí" (+3) × "retrocedí" (–5) = (–15), como se muestra:



a) De acuerdo con lo anterior, ¿qué significa "no avancé 2 veces 4"? ______________

____

b) ¿Qué multiplicación representa el movimiento? ______________

c) ¿Qué significa "sí avance 5 veces 2"? ______________

____

d) ¿Qué multiplicación representa la situación? ______________

e) ¿Qué significa "no retrocedí 3 veces 4" y qué multiplicación representa a esta expresión? ______________

____

10. Representen los siguientes movimientos con una multiplicación y resuelvan.

a) No avance 3 veces 4. Multiplicación: ______________

b) Sí avance 8 veces 6. Multiplicación: ______________

c) Sí retrocedí 9 veces 7. Multiplicación: ______________

d) No retrocedí 12 veces 5. Multiplicación: ______________

11. De acuerdo con lo anterior, representen las siguientes frases con una multiplicación un "positivo" o un "negativo" según corresponda.

a) Sí avancé: (____) × (____) = (____) c) Sí retrocedí: (____) × (____) = (____)

b) No avancé: (____) × (____) = (____) d) No retrocedí: (____) × (____) = (____)

12. Discutan sobre los resultados de la actividad con otros compañeros y validen si las reglas obtenidas antes coinciden con los resultados de esta actividad.

individual

13. Resuelve las siguientes multiplicaciones a partir de la sucesión que se genera.

$2.4 \times 3 =$ ______	$-2.4 \times 3 =$ ______
$2.4 \times 2 =$ ______	$-2.4 \times 2 =$ ______
$2.4 \times 1 =$ ______	$-2.4 \times 1 =$ ______
$2.4 \times 0 =$ ______	$-2.4 \times 0 =$ ______
$2.4 \times (-1) =$ ______	$-2.4 \times (-1) =$ ______
$2.4 \times (-2) =$ ______	$-2.4 \times (-2) =$ ______
$2.4 \times (-3) =$ ______	$-2.4 \times (-3) =$ ______

a) ¿Coinciden los resultados con las reglas que obtuvieron al multiplicar números enteros positivos y negativos? ______

b) ¿Cuál es el resultado de multiplicar -3.4×1.2? ______

c) ¿Y el resultado de multiplicar $(-3.4)(-1.2)$? ______

14. Considera las reglas de la actividad de la página anterior y representa los movimientos con una multiplicación y resuélvela. Simplifica.

a) No avancé $\frac{1}{2}$ vez $\frac{3}{4}$ Multiplicación: ______

b) Sí avancé $\frac{2}{3}$ de veces $\frac{7}{5}$ Multiplicación: ______

c) No retrocedí $\frac{4}{6}$ de veces $\frac{3}{2}$ Multiplicación: ______

d) Sí retrocedí $\frac{6}{9}$ de veces $\frac{5}{8}$ Multiplicación: ______

15. Resuelve las siguientes operaciones mentalmente. Analiza los resultados y responde.

a) $(7)(3.5)(-2) =$ ______

b) $(-2)(-0.5)(1.6)(1) =$ ______

c) $-\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times -\frac{2}{3} =$ ______

d) ¿Qué relación hay entre la cantidad de factores negativos y el tipo de número (positivo o negativo) del resultado de una multiplicación? ______

______

16. Comenta la última respuesta con un compañero. En caso de que haya diferencias, busquen argumentos para justificar su postura en busca de acuerdos.

Otra vista

Una multiplicación de números negativos puede considerarse como una "negación doble" que representa algo positivo. Por ejemplo, "es **imposible** ganar", representa **una negación** a la posibilidad de ganar. Pero si decimos: "**no** es **imposible** ganar", significa que ganar sí es posible, es decir, la doble negación se convierte en algo positivo.

pareja

Para formalizar

17. En parejas, validen sus conclusiones con la siguiente información.

Se conoce como **regla de los signos para la multiplicación** a la convención sobre el signo del resultado al multiplicar números positivos y negativos. Dicha regla nos indica que:

(positivo) × (positivo) = (positivo)	$(a)(b) = (c)$
(positivo) × (negativo) = (negativo)	$(a)(-b) = (-c)$
(negativo) × (positivo) = (negativo)	$(-a)(b) = (-c)$
(negativo) × (negativo) = (positivo)	$(-a)(-b) = (c)$

Es decir, al multiplicar dos números con el mismo signo el resultado es un número positivo y al multiplicar dos números con diferente signo, el resultado es un número negativo. Estas reglas son válidas para números decimales y fracciones.

Cuando en una multiplicación la cantidad de números negativos es par, el resultado es positivo, y cuando la cantidad es impar, el resultado es negativo.

individual

Ponlo en práctica

18. Escribe los números que completan cada multiplicación.

a) $12 \times (\_\_\_\_) = -180$

c) $12 \times (\_\_\_\_) = -180$

e) $(\_\_\_\_) \times (25) = -150$

b) $(\_\_\_\_) \times (-11) = 99$

d) $-8 \times (\_\_\_\_) = -168$

f) $(\_\_\_\_) \times (-11) = 99$

19. Resuelve los problemas.

a) Una casa de bolsa tuvo una variación de −2.6 puntos durante seis días consecutivos. ¿Cuál fue la variación final? ________

b) Si un buzo se sumerge a razón de −5.4 m cada $\frac{1}{2}$ minuto, ¿a qué profundidad se encontrará después de $3\frac{1}{2}$ minutos? ________

Consulta en...

Para practicar la multiplicación de números positivos y negativos, ingresa a:

www.thatquiz.org/es-1/matematicas/aritmetica/

20. Resuelve las siguientes multiplicaciones. Simplifica los resultados.

a) $-\frac{5}{8} \times -20 =$ ________

e) $\frac{9}{13} \times -4 =$ ________

b) $\frac{4}{9} \times -8 =$ ________

f) $\frac{7}{11} \times (-9.1) =$ ________

c) $-\frac{8}{15} \times 3 = -\frac{24}{15} =$ ________

g) $\frac{3}{40} \times 12 =$ ________

d) $-975 \times (-0.1) =$ ________

h) $-50 \times 7.125 =$ ________

equipo

21. Compara tus respuestas con las de algunos de tus compañeros. Si tienen dudas, manifiéstenlas ante el grupo y aclárenlas con la ayuda de su profesor.

Divisiones de números positivos y negativos

Propósito Conocerás las reglas para dividir números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos.

individual

1. Resuelve los siguientes problemas.

Una tienda tiene una promoción que permite adquirir aparatos electrónicos a plazos de meses sin intereses. Los siguientes son algunos de los aparatos que venden:

a) Mariana pagará un equipo de sonido a 9 meses. Al hacer la cuenta, sabe que tiene que abonar mensualmente $375.

- ¿Cuál es el precio del aparato que compró Mariana? ______

b) Gilberto pagará la pantalla de $9048 en un plazo de 12 meses.

- Considerando el plazo de la compra, ¿cuánto pagará mensualmente? ______

c) Generalmente las deudas o saldos en contra se presentan con números negativos. Por ejemplo, si una persona adquiere un crédito por $10000, entonces tiene un saldo de –$10000.

- Considerando la información anterior, ¿qué operaciones de números positivos y negativos permiten resolver cada problema? ¿Cuál sería el resultado? ______

d) Pedro tiene un saldo de –$8550 en su tarjeta de crédito y la deuda de su hermana Natalia es de –$1280.

- ¿Cuántas veces es mayor la deuda de Pedro? ______
- ¿Qué operación te permitió obtener la respuesta? ______

En mi entorno

Busca información sobre una tienda que ofrezca pagar sus productos a meses sin intereses. Investiga el precio de varios artículos y calcula cuánto se tendría que pagar cada mes con dicha promoción.

pareja

2. Reúnete con un compañero para verificar si tienen las mismas respuestas. Si existen diferencias, expresen sus argumentos para que entre los dos descubran en dónde está el error y corrijan.

pareja

3. Lean la información y resuelvan en parejas.

Retomemos el trabajo sobre la multiplicación de números positivos y negativos para la división de números positivos y negativos.

Como saben, la multiplicación y la división se consideran operaciones inversas ya que una permite determinar el resultado de la otra. Por ejemplo:

$a \times b = c$, entonces $c \div b = a$ y $c \div = b$.

a) De acuerdo con lo anterior, usen las multiplicaciones como apoyo para determinar el resultado de las divisiones.

$124 \div 8 =$	$8 \times$ _____ $= 124$
$84 \div (-7) =$	$-7 \times$ _____ $= 84$
$96 \div 6 =$ _____	$6 \times$ _____ $= 96$
$-125 \div (5) =$	$5 \times$ _____ $= (-125)$
$-144 \div 9 =$	$9 \times$ _____ $= (-144)$
$72 \div (-4) =$	$-4 \times$ _____ $= 72$

b) Según los resultados anteriores, ¿cuál es el resultado de $-2 \div 2$, $-8 \div 2$ y $-10 \div 2$?

____

____

4. Ahora, resuelvan las siguientes divisiones. Consideren que si $-a \div a = -1$, entonces, $a \div (-a) = -1$.

a) $3 \div -3 =$ ________ d) $-3 \div -3 =$ ________

b) $15 \div -3 =$ ________ e) $-9 \div -3 =$ ________

c) $12 \div -3 =$ ________ f) $-12 \div -3 =$ ________

g) Si sobre la recta numérica se dan 3 saltos a la izquierda y se llega a -15, ¿de cuántas unidades se dieron los saltos? ________________

h) ¿Qué división representa la situación? ________________

5. Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Inventen una serie de divisiones, todas con el mismo divisor positivo o negativo y represéntenlas en un plano cartesiano. ¿Qué relación hay entre estas operaciones y las multiplicaciones de números positivos y negativos?

pareja

6. Apliquen la relación entre la multiplicación y la división, completen las multiplicaciones y resuelvan las divisiones.

a) $21 \times (-\_\_\_\_) = -126$ → $-126 \div 21 =$ ________

b) $(\_\_\_\_) \times (-8) = 104$ → $104 \div (-8) =$ ________

c) $(9\_\_\_\_ \times (-14) = -144$ → $-144 \div (-14) =$ ________

d) $15 \times (7\_\_\_\_) = -105$ → $105 \div 15 =$ ________

e) $8 \times (\_\_\_\_) = -192$ → $-192 \div 8 =$ ________

f) $-25 \times (\_\_\_\_) = -275$ → $-275 \div (-25) =$ ________

Otra vista

La multiplicación y la división son operaciones inversas, ya que una permite obtener el resultado de otra. Por ejemplo, si $a \times b = c$, entonces, $c \div b = a$ y $c \div a = b$.

7. A partir de las actividades anteriores, respondan.

a) ¿Qué tipo de números corresponden al cociente al dividir dos números positivos o dos negativos?

____

b) ¿Y cuando se divide un número positivo entre un número negativo y viceversa?

____

c) ¿Cuál es el resultado de la división $-16 \div 10$? ________

d) Alma multiplicó un número por 0.25 y el resultado fue −1.75. ¿Qué operación permite conocer el factor que falta? ________

¿Cuál es el factor que falta en la multiplicación? ________

e) Si $-\frac{3}{4}x$ es igual a $\frac{1}{2}$, ¿cuánto vale x? ________

8. Resuelvan las siguientes operaciones. Redondeen o simplifiquen los resultados, según corresponda.

a) $5 \div (-1.2) =$ ________

b) $-\frac{6}{5} \div \frac{1}{3} =$ ________

c) $-8.4 \div (-2.2) =$ ________

d) $\frac{7}{8} \div (-\frac{1}{6}) =$ ________

grupo

9. Muestren a sus compañeros las operaciones que hicieron. Comenten la relación entre el signo del dividendo y el divisor con el signo del cociente. Juntos establezcan una regla para dividir números positivos y negativos.

Para formalizar

pareja

10. En equipos, realicen una lectura comentada del siguiente texto.

Se conoce como **regla de los signos para la división** a la convención sobre el signo del resultado al dividir números positivos y negativos. Dicha regla nos indica que:

(positivo) ÷ (positivo) = (positivo)	$(a) \div (b) = (c)$
(positivo) ÷ (negativo) = (negativo)	$(a) \div (-b) = (-c)$
(negativo) ÷ (positivo) = (negativo)	$(-a) \div (b) = (-c)$
(negativo) ÷ (negativo) = (positivo)	$(-a) \div (-b) = (c)$

Al dividir dos números con el mismo signo el resultado es un número positivo, y al dividir dos números con diferentes signos, el resultado es un número negativo.

Estas reglas también son válidas al dividir números decimales y fracciones.

Ponlo en práctica

individual

11. Responde.

a) ¿Qué número multiplicado por 3.6 es igual a 2.88? __________

b) Si multiplico un número por −4.2 el resultado es 63. ¿De qué número se trata?

____

c) Pablo dividió el saldo de su tarjeta de crédito en 9 pagos mensuales. Si su saldo es de −$5 324.40, ¿cuánto restará a su deuda cada mes? __________

____

d) Si en una ciudad la temperatura varió −1.5 °C de manera constante durante 2.5 horas. ¿De cuántos grados fue la variación cada hora? __________

____

12. Resuelve las siguientes ecuaciones. Representa el procedmiento para despejar la incógnita.

a) $-24x = -408$ $x =$ __________

b) $\frac{3}{2}x = -2$ $x =$ __________

c) $-5.1x = 36.72$ $x =$ __________

d) $-6.8 = 0.85x$ $x =$ __________

Consulta en...

Ingresa a: https://www.vitutor.com/di/e/a_6e.html y resuelve los ejercicios y problemas sobre divisiones de números positivos y negativos.

(Consulta: 24 de abril de 2018.)

13. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros. En caso de diferencias, analicen sus procedimientos en busca de los posibles errores. Busquen el apoyo de otros compañeros y del profesor.

Jerarquía de operaciones

Propósito Aplicarás la jerarquía de operaciones en cadenas de operaciones que combinan números enteros, decimales y fracciones, positivos y negativos.

pareja

1. Reúnete con un compañero y retomen el juego de los dados de la página 29 y resuelvan las siguientes actividades.

   La siguiente tabla muestra los resultados que obtuvieron Néstor y sus primos durante seis turnos consecutivos.

   a) Anoten los puntos que obtuvo cada jugador.

Jugador	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4	Turno 5	Turno 6	Total
Néstor	–15	19	–15	23	–15	–7	
Carlo	–8	24	–9	13	4	–9	
Emiliano	7	–18	–5	19	–8	19	
Emmanuel	–11	–24	6	8	12	–5	

   b) ¿Quién obtuvo más puntos y quién menos puntos? ______________________

   c) ¿Los puntos de qué jugador se pueden obtener con la operación: $2(-9) + (-8) + 41$? Resuelvan la operación. ______________________

   d) Representen con una operación combinada los puntos que obtuvo Néstor y resuélvanla paso a paso: ______________________

2. Ahora, escriban la operación para cada situación y resuélvanla.

   a) A diez más menos cinco hay que multiplicarlo por menos cuarenta:

   ____

   b) A veintitrés hay que sumarle la multiplicación de menos doce por menos siete.

   ____

   c) La diferencia de dividir nueve entre cinco y seis entre menos cuatro.

   ____

equipo

3. Validen sus resultados con su calculadora. Utilicen la tecla "+/–" para representar los números negativos. En caso de que no coincidan, verifiquen sus procedimientos con algunos de sus compañeros, tanto en la calculadora como en las operaciones, con la intención de identificar los errores.

equipo

Para formalizar

4. Analicen la siguiente información. Después, revisen las operaciones que realizaron anteriormente y, si tienen errores, corríjanlas.

Cuando se realizan cadenas de operaciones que combinan sumas o restas con multiplicaciones y divisiones, primero se deben realizar las multiplicaciones o las divisiones (aplicando la regla de los signos) y, posteriormente, las sumas y las restas. Por ejemplo, en la cadena de operaciones que se muestra abajo.

Cuando en las operaciones se usan paréntesis, corchetes o llaves, el orden de solución es de adentro hacia afuera. Por ejemplo:

$$20 - \{(-10 + 3) \times [(15 \div (-5)]\}$$
$$20 - [(-7) \times (-3)] =$$
$$20 - (21) = -1$$

Ponlo en práctica

individual

5. Resuelve el problema.

Pablo tiene un videojuego en el que acumula puntos positivos y negativos. Durante cinco turnos consecutivos sumó −12.5 puntos. En los primeros tres turnos obtuvo la misma puntuación, el cuarto día obtuvo +2.6 puntos y el quinto, −1.2 puntos.

a) Escriban la operación que permite obtener la puntuación de cada uno de los tres primeros turnos: ____________________

____

b) ¿Cuántos puntos perdió Pablo en el primer turno? ____________________

____

6. Resuelve las operaciones.

a) $15 \times 7 \div (-6) =$ ____________________

b) $2.3 + (-9) \times 1.2 =$ ____________________

c) $(-76 + 28) \div (-8) =$ ____________________

d) $-80 \times 12 \div (-6) =$ ____________________

e) $-12 + 4 \times (5 + 3) =$ ____________________

f) $21 + (-8) \div 4 \times (-2 + 3) =$ ____________________

7. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros. Si existen diferencias, busquen el apoyo de su profesor para aclararlas.

individual

◂ Integramos

1. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $-17 \times (-12) =$ ______

b) $15.4 \div (-4) =$ ______

c) $(7)(3.2)(-2.1) =$ ______

d) $-9.5 \times 2.4 \div (-1.2) =$ ______

e) $-\frac{5}{6} \times (-\frac{1}{4}) \times \frac{4}{3} =$ ______

f) $-\frac{8}{7} \div (-\frac{3}{4}) \times \frac{5}{2} =$ ______

2. Escribe las operaciones de números positivos y negativos que permiten resolver el problema.

Cuatro amigos adquirieron un préstamo bancario para iniciar un negocio. Carlos pagará 15% del préstamo; Hilda, 20%; Luis, 25% y Elena, 40%. Si el saldo final es de –$12 000, ¿cuál es el saldo de cada uno?

a) Carlos: ______

b) Hilda: ______

c) Elena: ______

d) Luis: ______

3. Responde.

a) ¿Cuál es el resultado de dividir $\frac{7}{3}$ entre $\frac{3}{4}$? ______

b) Si a por –6.5 es igual a 14.95, ¿cuánto vale a? ______

c) Si un número *b* se multiplica por –0.2 y al resultado se le resta 2, el resultado es igual a –1.64. ¿Cuánto vale *b*? ______

d) Un número por 7.2 más –7.9 es igual a 26.66, ¿de qué número se trata? ______

4. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $5 + (-3m) = -17$ $m =$ ______

b) $1.5p = 3 \times (-2.8) + 2.1$ $p =$ ______

c) $-\frac{1}{2}a + \frac{3}{4} = 1$ $a =$ ______

5. Resuelve las operaciones aplicando la jerarquía.

a) $-2 \times \{6 - 2 + (-12 - 4) \div 4 + 7\} =$ ______

b) $8 + [1 - (10 - 11) \div (-3)] =$ ______

Expresiones algebraicas equivalentes

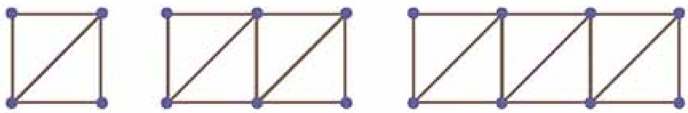
Aprendizaje esperado: Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Sucesiones y figuras geométricas

individual

Exploramos

1. Observa la sucesión que se formó con palillos de madera y bolitas de plastilina y responde.



a) ¿Cuántos palillos y bolitas de plastilina se necesitan para la cuarta figura? ______

b) ¿Cuántos se necesitan para formar la figura 10 de la sucesión? ______

2. Escribe los cinco términos que continúan cada sucesión aritmética.

a) $-8, -2, 4, 10,$ ______ y

b) 2.3, 4.2, 6.1, 8, ______

c) $21, 12, 3, -6, -15,$ ______

3. Describe con palabras la regla de cada sucesión.

a) ______

b) ______

c) ______

4. Elige la expresión algebraica que representa a cada sucesión. Anota el inciso correspondiente en cada caso.

$9n - 21$	( )	$1.9n + 0.4$	( )	$-9n + 30$	( )
$2.3n + 1.9$	( )	$6n - 14$	( )	$6n - 8$	( )
$-8n + 6$	( )	$1.9n + 2.3$	( )		

pareja

4. Al terminar, comparte tus respuestas con un compañero. Si no eligieron las mismas expresiones, validen sus respuestas sustituyendo n por diferentes términos de las sucesiones.

Diferentes formas de expresar la regla de una sucesión

Propósito Representarás mediante expresiones algebricas equivalentes la regla de sucesiones aritméticas.

◂ Transitamos

pareja

1. Organizados en parejas, lean la información y respondan.

Emiliano quiere comprar un videojuego que cuesta \$740, por lo que empezó un plan de ahorro. Sabe que puede guardar \$15 al día del dinero que le dan para la escuela. Con el fin de apoyarlo, su papá le dio \$50 para iniciar su ahorro y Emiliano empezó a guardar dinero al día siguiente.

Ahorros de Emiliano.

a) ¿Cuánto dinero tenía Emiliano en su primer día de ahorro?

b) Escribe el dinero que tendrá en cada uno de sus diez primeros días de ahorro.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero (\$)										

c) ¿Cuánto dinero tendrá Emiliano después de 15 y de 20 días? Expliquen cómo obtuvieron las respuestas.

d) ¿Qué expresión algebraica de la forma $an + b$ sirve para saber cuánto dinero tendrá Emiliano después de n días?

e) ¿Hay otra forma de representar la misma regla? Argumenten su respuesta.

Emiliano quería saber en cuántos días juntará el dinero para su videojuego.

f) Escribe una ecuación, en función de n, que permita saber cuántos días tienen que pasar para que Emiliano junte \$740:

g) Resuelvan la ecuación. ¿En cuánto días podrá comprar su juego?

En mi entorno

¿Tu tienes un plan de ahorro? ¿Cuánto dinero ahorras?

El ahorro es un hábito que nos trae muchos beneficios, nos permite planear compras a futuro, viajes, adquirir bienes, etcétera.

Establece un plan de ahorro semanal, piensa en una cantidad inicial y cuanto podrías ahorrar semanalmente y establece una sucesión. ¿Cuánto dinero tendrías en un mes? ¿Y en un año?

Comparte tu trabajo con tus compañeros.

equipo

2. Comparen su expresión con la de algunos de sus compañeros. Si son diferentes, validen que ambas sean correctas. Juntos busquen otra manera de representar la misma regla de la sucesión.

equipo

3. En equipos, retomen el problema de Emiliano y resuelvan.

a) Escriban el ahorro de Emilano en el día 2 como una suma que involucre al primer término: __________

b) Escriban el ahorro diario como una suma iterada de la diferencia más el primer término. Después, representen la suma iterada como una multiplicación. . Observen el ejemplo.

Día 3: $50 + 15 + 15 + 15 = 50 + 15 \times 3$

Día 4: __________

Día 5: __________

Día 6: __________

c) Con relación al número de días, ¿cuántas veces sumaron la diferencia en cada caso? __________

d) A partir de lo anterior, describan con palabras como obtener la cantidad ahorrada cada día: __________

e) ¿Cuántas veces tendrían que sumar la diferencia el día n? __________

f) De acuerdo con la anterior, ¿cuánto dinero tendrá Emiliano el día n? __________

4. Comparen esta expresión con la que obtuvieron en la actividad anterior y validen que ambas sean correctas calculando el ahorro de Emiliano en los siguientes días.

Día 13		Día 26		Día 35	

a) ¿Obtuvieron los mismos resultados? __________

b) Simplifiquen la expresión algebraica que escribieron en el inciso e de la actividad anterior: __________

c) ¿Qué observan? ¿Qué relación tiene con la que obtuvieron antes? __________

grupo

5. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Comenten la relación entre las expresiones obtenidas en ambas actividades. Debatan para tratar de llegar a acuerdos acerca del procedimiento más eficaz para obtener dichas reglas.

pareja

6. Tracen las tres figuras que continúan la siguiente sucesión.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

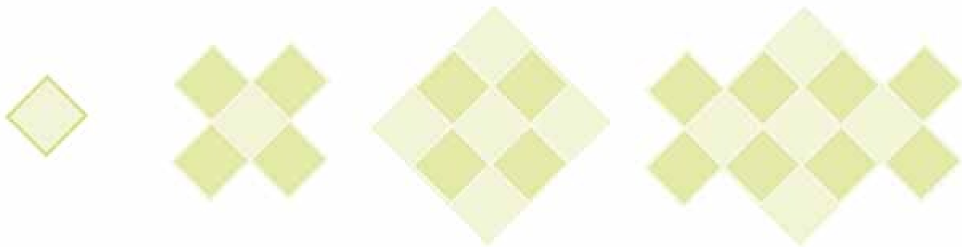


Figura 5 Figura 6 Figura 7

a) Completen la siguiente tabla:

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de cuadrados										

b) Escriban de dos maneras diferentes la regla de la sucesión de cuadrados.

Regla 1: ____________________ Regla 2: ____________________

c) Escriban el número de cuadrados que corresponden a las siguientes figuras usando las dos expresiones que escribieron, para validarlas.

Figura 12: __________ Figura 37: __________ Figura 85: __________

Figura 25: __________ Figura 52: __________ Figura 90: __________

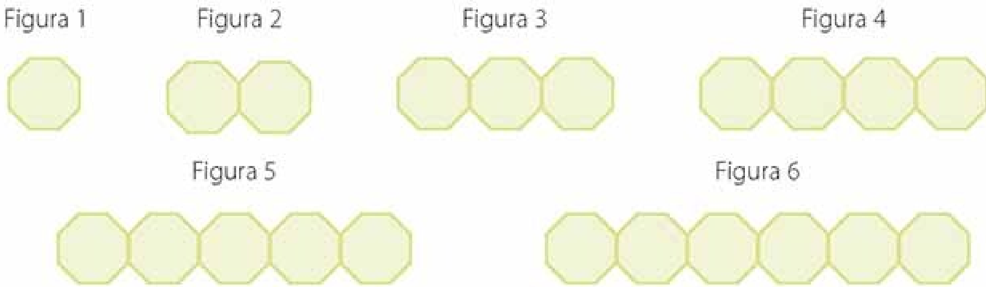
d) ¿Alguna figura de la sucesión tiendra 252 cuadrados? Si es así, ¿de qué figura se trata? Expliquen algebraicamente su respuesta. ____________________

____

____

pareja

7. Continúen trabajando en parejas y subrayen todas las expresiones algebraicas que representan la sucesión que se genera con el perímetro de las siguientes figuras.



$8 + 6n - 1$ $\quad$ $8 + 6n - 6$ $\quad$ $8 + 8(n - 1)$ $\quad$ $2 + 6n$

$8 + 6n$ $\quad$ $6n + 2$ $\quad$ $6(n - 1) + 8$

a) ¿Cuál será el perímetro de la figura 24 de la sucesión? ____________________

b) Calculen el perímetro de la figura 29 de dos formas. ____________________

____

c) ¿En qué figura de la sucesión el perímetro es igual a 212? ____________________

____

8. Escriban los siguientes cinco términos de cada sucesión numérica y elijan las expresiones que representan su regla. Asignen diferentes valores numéricos a *n* para determinar si las expresiones elegidas corresponde a cada sucesión.

a) −12, −1, 10, 21, 32, ____________________

Regla:

$-11n - 1$ $\quad$ $11(n - 1) - 12$ $\quad$ $-12 + 11n$ $\quad$ $-11n + 12$

b) 9, 23, 37, 51, 65, ____________________

Regla:

$14 + 9n - 1$ $\quad$ $9 + 14(n - 1)$ $\quad$ $-5 + 14n$ $\quad$ $9n - 14$

c) 3.2, 4.1, 5, 5.9, 6.8, ____________________

Regla:

$0.9n + 2.3$ $\quad$ $3.2 + 0.9(n - 1)$ $\quad$ $2.3 - 0.9n$ $\quad$ $0.9n + 3.2 - 0.9$

grupo

9. Comparen sus resultados con los de otras parejas. Si no coinciden en las reglas elegidas, expongan sus argumentos en busca de acuerdos. Si tienen dudas, busquen el apoyo de su profesor para resolverlas.

equipo

10. Reunidos en equipos de tres o cuatro integrantes, lean la información y resuelvan las actividades.

Un tinaco de agua tiene una pequeña fuga, lo que genera que pierdan 7 litros de agua por minuto.

a) Anoten cuántos litros de agua quedan en el tinaco, considerando que tenía 225 L cuando comenzó la fuga.

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Agua en el tinaco (L)										

b) ¿Qué característica tiene la sucesión que se genera con el agua que queda en el tinaco? ______

______

c) Al representar la regla de la sucesión de la forma $an + b$, ¿cuánto vale a? Argumenten su respuesta. ______

______

d) Escriban de dos maneras la regla de la sucesión que se genera con el agua que queda en el tinaco: ______

______

e) Si no se arregla la fuga, ¿cuántos litros de agua quedarán en el tinaco después de 15 minutos? ______

f) Escriban una ecuación que represente en cuánto tiempo quedaría vacío el tinaco y resuélvanla. ______

______

11. Escriban de dos formas la regla de las siguientes sucesiones descendentes. Comprueben si sus reglas son correctas asignado diferente valores (número de término) a la literal.

a) −14, −27, −40, −53, −66… Reglas: ______ = ______

b) 62, 56, 50, 44, 38, 32… Reglas: ______ = ______

c) 16, 8, 0, −8, −16, −24… Reglas: ______ = ______

12. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Comenten las diferencias entre las sucesiones ascendentes y las descendentes y cómo se reflejan en la expresión algebraica que las representa.

pareja

Para formalizar

13. Junto con un compañero, lee la siguiente información. Si tienen dudas, expónganlas ante el grupo para aclararlas.

Existen varias maneras de representar algebraicamente la regla de una sucesión aritmética. A dichas expresiones se les conoce como **expresiones equivalentes**, es decir, representan una igualdad.

Por ejemplo, la sucesión numérica: 7, 13, 19, 25, 31…

La regla puede representarse de la forma: $an + b$, donde a es igual a la diferencia entre términos consecutivos, $\boldsymbol{n}$ representa cualquier término y $\boldsymbol{b}$ es el valor que se suma o resta (es igual al **primer término menos la diferencia**). Por tanto, la regla sería: $6n + 1$.

Otra forma, de representar la regla de una sucesión es: $m_1 + a(n - 1)$, donde $\boldsymbol{m_1}$ representa el primer término; $\boldsymbol{a}$, la diferencia entre términos consecutivos y $\boldsymbol{n}$, cualquier término. La regla de la sucesión sería: $7 + 6(n - 1)$. Al simplificar la expresión, tenemos: $7 + 6n - 6 = 1 + 6n$.

Una forma de representar algebraicamente lo anterior es:

$m_1 + a(n - 1) = m_1 + an - a$, y como $b = m_1 - a$, por tanto, $an + b = an + m_1 - a$

Cuando en una sucesión aritmética a es un número negativo, es decir, $-a$, la sucesión es descendente. Por ejemplo: 13, 10, 7, 4, 1, −2, −5…

La regla de la sucesión es: $13 + (-3)(n - 1) = -3n + 16$.

Ponlo en práctica

14. Completa la siguiente tabla.

Sucesión	Regla 1	Regla 2	Término 35	Término 81
−16, −9, −2, 5...				
25, 21, 17, 13...				
−1, −6, −11, −16...				
9, 22, 35, 48, 61...				
13, −2, −17, −32...				

Consulta en...

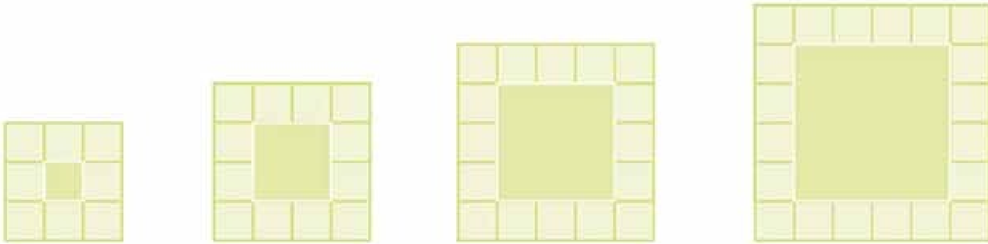
Ingresa a: https://goo.gl/dLhZCc resuelve los ejercicios para practicar el trabajo realizado en la lección.

15. Comparte tus resultados con tus compañeros. Si tienes dudas, no dudes en consultarlas con tus compañeros y con el profesor para aclararlas.

individual

1. Escribe la sucesión de cuadrados verdes mediante tres expresiones algebraicas equivalentes. No consideren el cuadrado central de cada figura.

◂ Integramos



Expresión 1: __________ Expresión 2: __________ Expresión 3: __________

a) ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 18 de la sucesión? __________

b) ¿Qué figura está formada por 132 cuadrados? __________

2. Responde.

a) Si la expresión $-9 + 6n$ representa la regla de una sucesión, ¿qué expresión equivalente representa la misma regla? __________

b) Si el primer término de una sucesión es 13 y la diferencia es -1, escribe la regla con dos expresiones equivalentes: __________

c) ¿Qué expresiones representan la regla de la sucesión 87, 63, 39, 15, -9…?

$-24n + 111$ $\quad$ $24 - 111n$ $\quad$ $87 + (-24n)(n - 1)$

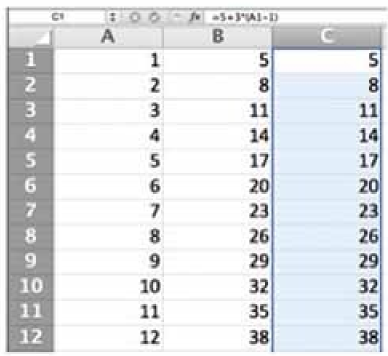
$-24n + 24 + 87$ $\quad$ $-111 + (-24n)$

3. Trabaja en una hoja electrónica de cálculo para generar sucesiones aritméticas.

a) Abre un archivo y en la columna A escribe los números del 1 al 30 para representar el número de término de la sucesión.

b) En la celda B1 escribe una regla de la forma $an + b$, por ejemplo: $3n + 2$ se escribe: =3*A1+2. Presiona *enter,* selecciona la celda y arrastra el cursor hacia abajo para generar la sucesión.

c) En la celda C1 escribe la misma regla, pero ahora de la forma $m1 + a(n - 1)$. Para el caso anterior, sería: $5 + 3(n - 1)$, que se escribe: =5+3*(A1–1). Presiona *enter*, selecciona la celda y arrastra el cursor.



	A	B	C
1	1	5	5
2	2	8	8
3	3	11	11
4	4	14	14
5	5	17	17
6	6	20	20
7	7	23	23
8	8	26	26
9	9	29	29
10	10	32	32
11	11	35	35
12	12	38	38

d) Reflexiona, ¿qué fórmula usarías para representar en una hoja de cálculo la sucesión: 7, 21, 35, 49,...? __________

e) Construye la sucesión en la hoja de cálculo. ¿Qué valores corresponden a los términos 20, 31, 43 y 55? __________

4. Genera otras sucesiones ascendentes y descendentes.. Comparte tu trabajo con tus compañeros. Si tienes dudas, busca el apoyo de quienes dominen la herramienta.

Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

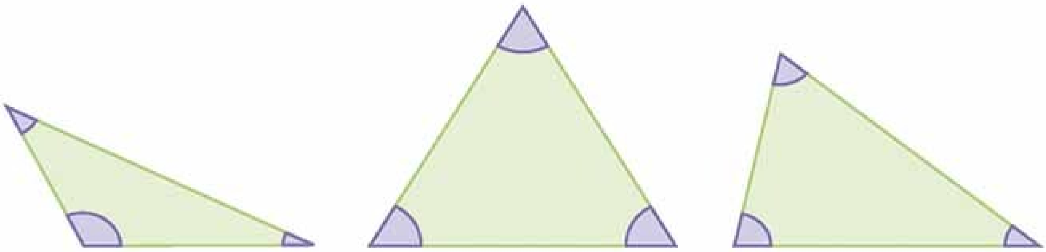
Construcción de polígonos regulares

Triángulos y polígonos estrellados

individual

Exploramos

1. Mide con tu transportador y anota la medida de los ángulos de los siguientes triángulos.



a) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier triángulo? ______

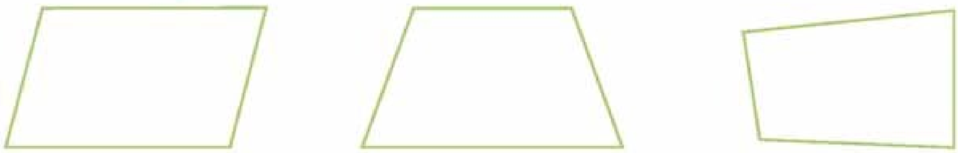
Glosario

Diagonal. Segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

En mi entorno

Los polígonos estrellados se construyen a partir de trazar las diagonales de un polígono regular. Se forman al unir los vértices de dos en dos, tres en tres, etcétera.

2. Tracen una diagonal en los siguientes cuadriláteros y respondan.



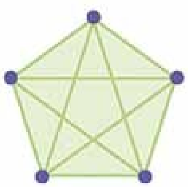
a) ¿En cuántos triángulos se dividen? ______

b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada cuadrilátero? Expliquen por qué.

______

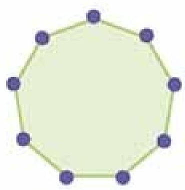
3. Traza las diagonales uniendo los vértices, según se indica, para formar polígonos estrellados. Después, anota cuántas diagonales trazaste. Observa el ejemplo.

a) De dos en dos



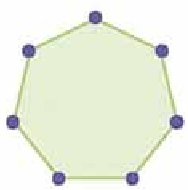
______

b) De dos en dos



______

c) De tres en tres



______

pareja

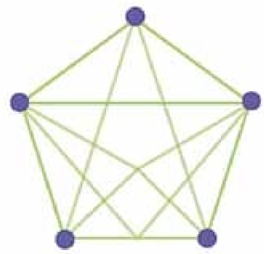
4. Comparte tus respuestas con un compañero y digan si están de acuerdo o no con la forma en que trazaron las diagonales. Decoren los diseños a su gusto y piensen en otra manera de hacer un polígono estrellado en cada figura.

Diagonales de polígonos de *n* lados

Propósito Aprenderás a calcular el número de diagonales de cualquier polígono. ◂ Transitamos

pareja

1. Observen el polígono estrellado que trazaron unos estudiantes y respondan.

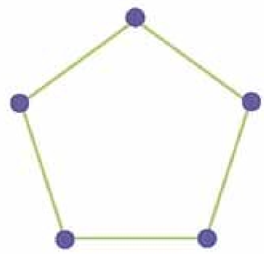


a) Si los estudiantes afirman que construyeron el polígono a partir de las diagonales del pentágono, ¿estarían de acuerdo con su postura? Expliquen por qué.

____

b) Remarquen las líneas que representan diagonales. ¿Cuántas diagonales trazaron los estudiantes? ____________________

2. Tracen las diagonales necesarias en el siguiente pentágono regular para formar un polígono estrellado. Después, respondan.



a) ¿Cuántas diagonales trazaron? ____________________

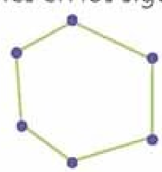
b) Comparen su diseño con el de la página anterior. ¿Habrá otra manera de construir un polígono estrellado en un pentágono? ¿Por qué? ____________

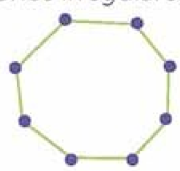
____

c) ¿Cuántas diagonales tiene, en total, un pentágono? ________________

d) Elijan un vértice cualquiera del pentágono. ¿Cuántas diagonales trazaron desde ese vértice? ____________________

3. Tracen todas las diagonales posibles en los siguientes polígonos irregulares.





a) Anoten la cantidad de diagonales que trazaron en cada figura.

Cuadrilátero: ________ Hexágono: ________ Octágono: ________

b) ¿Cuántas diagonales salen desde cada vértice en cada figura?

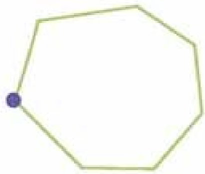
Cuadrilátero: ________ Hexágono: ________ Octágono: ________

equipo

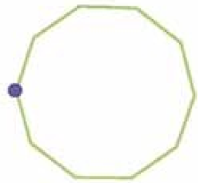
4. Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Si existen diferencias, utilicen la fórmula: $\frac{(n \times n - 3n)}{2}$, donde *n* representa el número de lados. Esta fórmula permite calcular el número de diagonales de cualquier polígono. ¿Habrá una fórmula para calcular el número de diagonales desde un mismo vértice? Registren sus acuerdos en el cuaderno.

pareja

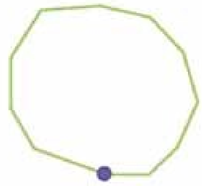
5. En parejas, tracen todas las diagonales posibles desde el vértice que se muestra en cada polígono y anoten el número de lados de cada figura y el número de diagonales que trazaron. Después, respondan.



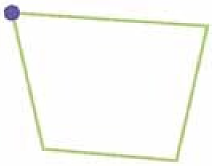
Lados: ____________
Diagonales: __________



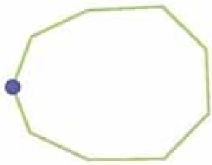
Lados: ____________
Diagonales: __________



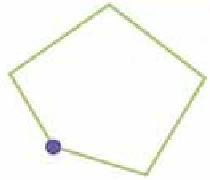
Lados: ____________
Diagonales: __________



Lados: ____________
Diagonales: __________



Lados: ____________
Diagonales: __________



Lados: ____________
Diagonales: __________

a) Si eligen otro vértice en cada figura para trazar las diagonales, ¿el número de diagonales cambia? ____________________

b) ¿Qué diferencia hay entre el numero de lados o vértices del heptágono con el número de diagonales desde un mismo vértice? ____________________

c) ¿Qué diferencia hay entre el número de vértices del cuadrilátero y el número de diagonales que trazaron? ____________________

d) Analicen la diferencia entre los vértices de cada polígono y el número de diagonales que trazaron. ¿Qué observan? ¿Qué relación hay en cada caso?

____

e) ¿Habrá una manera de anticipar el número de diagonales de un polígono desde un vértice? Expliquen su respuesta. ____________________

____

f) ¿Cuántas diagonales desde un vértice se podrán trazar en un polígono de 12 lados? ¿Y en uno de 15 lados? Expliquen su respuesta y tracen los polígonos para comprobarlo. ____________________

____

g) ¿Cuántas diagonales se podrán trazar desde un vértice en un polígono de *n* lados? ____________________

equipo

5. Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Establezcan una fórmula para calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en cualquier polígono. Validen su fórmula con el profesor.

pareja

6. Con un compañero realiza una lectura comentada del siguiente texto.

Para formalizar

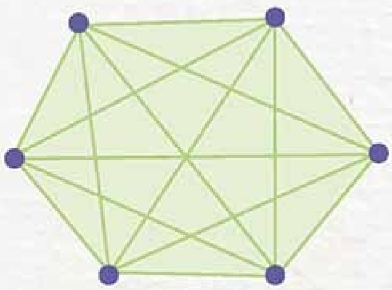
Los polígonos son figuras geométricas planas limitadas por tres o más lados y ángulos. El punto donde se intersecan los lados se llama **vértice**. En todo polígono, el número de lados es igual al número de vértices.

Los polígonos pueden ser convexos, cuando todos sus ángulos interiores miden menos de 180º, o cóncavos, cuando tienen ángulos interiores mayores a 180º.

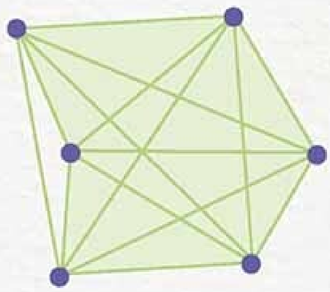
Los polígonos convexos tienen todas sus diagonales dentro de la figura y los cóncavos pueden tener diagonales fuera de ella.

Para calcular el número de diagonales de un polígono de n lados o n vértices se usa la fórmula: $\frac{(n \times n - 3\,n)}{2}$. Por ejemplo, un polígo de 6 lados tiene $\frac{(6 \times 6 - 6 \times 3)}{2} = 9$ diagonales, como se observa en las siguientes figuras.

Polígono convexo



Polígono cóncavo



Como una diagonal une dos vértices no consecutivos, para saber el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice, se resta 3 al número de vértices (los dos vértices consecutivos y el vértice de donde sale la diagonal), es decir, $n - 3$. En el hexágono, las diagonales desde cada vértice son $6 - 3 = 3$.

individual

8. Resuelve.

Ponlo en práctica

a) Utiliza la fórmula para justificar el número de diagonales de un triángulo.

____

b) ¿Por qué sucede lo anterior en un triángulo? ____________________

____

9. Anota el número de diagonales de cada polígono y las diagonales que se pueden trazar desde cada vértice.

Polígono (número de vértices)	15	18	22	27	33
Total de diagonales					
Diagonales desde un vértice					

Ángulos de polígonos

Propósito Establecerás una fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de polígonos y la medida de cada ángulo central, interior y exterior de polígonos regulares.

individual

1. Traza las diagonales desde un vértice en cada polígono y completa la tabla. Completa la última columna hasta la actividad 3.

Polígono	Número de lados	Diagonales desde un vértice	Triángulos en los que se divide	Suma de los ángulos interiores del polígono
Triángulo				
Cuadrilátero				
Heptágono				
Octágono				
Dodecágono				

Consulta en...

En un archivo de GeoGebra, construye polígonos, regulares e irregulares, cóncavos y convexos.

Selecciona la herramienta "Ángulo" y da clic sobre los polígonos para que aparezcan las medidas de sus ángulos interiores. Valida la fórmula que estableciste.

2. Responde a partir de los datos de la tabla.

a) ¿Qué relación hay entre el número de lados de cada polígono y el número de triángulos en que se divide? ______________________________

b) ¿Qué fórmula permite establecer el número de triángulos en que se divide un polígono de *n* lados a partir de las diagonales desde un vértice? ______________

c) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada triángulo? ______________

3. Deduce **la suma de los ángulos interiores** de cada polígono a partir de los triángulos en que se divide. En la última columna de la tabla anota la medida de dicha suma.

a) ¿Qué fórmula permite establecer la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados? ______________________________

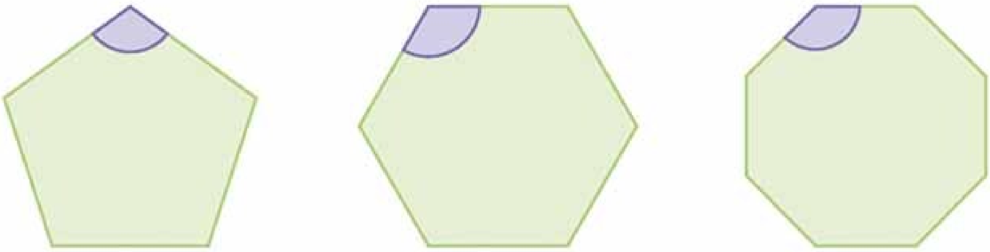
pareja

4. Compara tus resultados con los de uno de tus compañeros. Platiquen sobre la fórmula que escribieron. Si existen diferencias, busquen el apoyo de otros compañeros, con el fin de llegar a una respuesta en común.

pareja

5. Reunidos en parejas midan y anoten la medida del ángulo señalado en cada figura.

En las actividades anteriores trabajamos con polígonos irregulares. Ahora vamos a trabajar únicamente con polígonos regulares, como los siguientes.



a) ¿Qué características tienen todos los polígonos regulares? ______________________

____

b) Calculen la suma de los ángulos interiores de los polígonos anteriores.

Pentágono: ________ Hexágono: ________ Octágono: ________

c) ¿Qué hicieron para establecer la suma en cada caso? ______________________

____

6. Apliquen la fórmula que establecieron en la actividad anterior para calcular la suma de los ángulos interiores de cada polígono.

Pentágono: 180(__________) = ______________________

Hexágono: ______________________

Octágono: ______________________

a) ¿Coinciden los resultados de la suma que obtuvieron en ambos casos? ________

b) ¿Cómo pueden obtener la medida de cada ángulo interior de un polígono regular, sin medir? ______________________

____

c) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un decágono y de un dodecágono, ambos regulares? ______________________

____

d) Escriban una fórmula para calcular la medida de un ángulo interior de un polígono regular de *n* lados: ______________________

Consulta en...

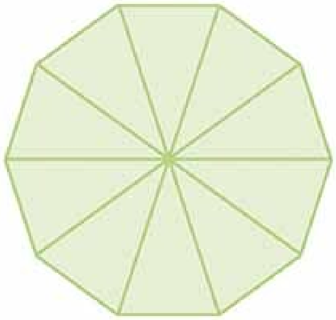
Ingresa a: https://bit.ly/2yK3IMQ y resuelve los ejercicios sobre cálculo de ángulos interiores de polígonos.

grupo

7. Entre todo el grupo y con la coordinación de su profesor, expongan sus respuestas. Muestren a sus compañeros la fórmula que establecieron. Si existen diferencias, argumenten su postura con el fin de llegar a acuerdos.

individual

8. Resuelve el siguiente problema.



Hilda construyó un decágono regular y después lo dividió en triángulos trazando líneas desde el centro de la figura hacia dos vértices continuos, como se muestra:

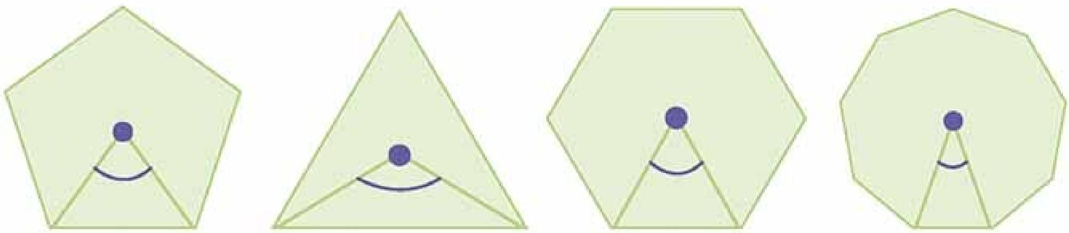
a) ¿Cuánto suman los ángulos que se forman en el centro de la figura? ____________________

b) ¿Qué tipo de triángulos se formaron? ____________________

c) ¿Qué relación hay entre los triángulos que se formaron? Argumenta tu respuesta. ____________________

d) ¿Cuánto miden los ángulos de cada triángulo? Explica cómo obtuviste las medidas. ____________________

9. Observa el triángulo que se formó en cada polígono regular, escribe de qué tipo es y anota la medida de sus ángulos, sin medir.



Polígono	Tipo de triángulo	Medida de sus ángulos (°)
Pentágono		
Triángulo		
Hexágono		
Nonágono		

a) ¿Qué hicieron para determinar la medida de los ángulos? ____________________

b) ¿Cómo pueden establecer la medida de los ángulos centrales de un polígono regular? ____________________

c) ¿Cuánto miden los ángulos centrales de un octágono regular? ____________________

d) Si el ángulo central de un polígono regular mide 18º, ¿cuántos lados tiene? ____________________

Glosario

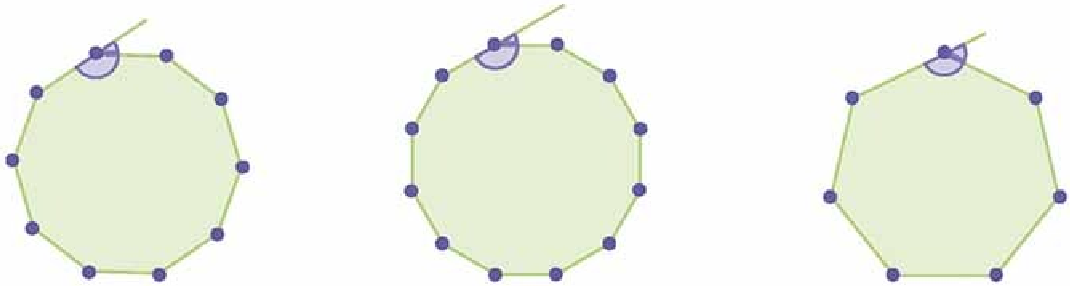
Ángulo central. En un polígono regular, tiene su vértice en el centro del polígono y sus lados pasan por vértices consecutivos del polígono.

10. Reúnete con un compañero y establezcan una fórmula para calcular la medida de los ángulos centrales de polígonos regulares. Validen su postura con la de otros compañeros.

pareja

11. Anoten la medida de los ángulos señalados en cada polígono regular.

Al ángulo que se forma en la prolongación de uno de los lados se le llama ángulo exterior, como se muesta en los siguientes ejemplos.



a) ¿Qué relación observan entre el ángulo exterior y el ángulo interior correspondiente en cada polígono? ¿Cuánto suman un ángulo interior y su correspondiente ángulo exterior? ______________________________

b) A partir de lo anterior, ¿cómo se puede establecer la medida del ángulo exterior a partir de la medida del ángulo interior? ______________________________

c) Validen si esto se cumple en cualquier polígono regular.

Consulta en...

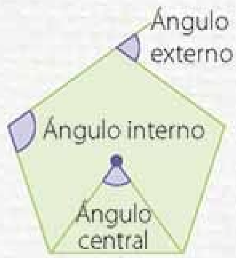
Observa el video que se muestra en: https://bit.ly/2K42clW donde se justifica la suma de los ángulos exteriores de polígonos.

12. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En grupo, con el apoyo del profesor, registren sus conclusiones sobre la relación entre los ángulos centrales, interiores y exteriores de polígonos regulares.

equipo

13. Lee la información. Después, regresa y valida tus conclusiones de las actividades previas.

Para formalizar



Los **ángulos interiores** de un polígono son aquellos que se forman en la unión de dos lados.

Los **ángulos centrales** se forman del centro de las figura a dos vértices consecutivos.

Los **ángulos exteriores** están formados por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.

La suma de los ángulos interiores de cualquier polígono es igual a: $180(n - 2) = 180n - 360$, donde n representa el número de lados.

De lo anterior se puede establecer que la medida de los ángulos interiores de cualquier polígono regular es igual a: $\frac{180(n-2)}{n}$.

Como la suma de los ángulos centrales de cualquier polígono regular es 360°, entonces, los ángulos centrales miden: $360° \div n$.

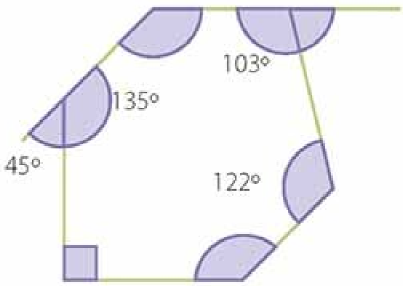
Los ángulos exteriores e interiores son suplementarios, es decir, suman 180°. Los ángulos exteriores de polígonos regulares miden: 180° – medida del ángulo interior.

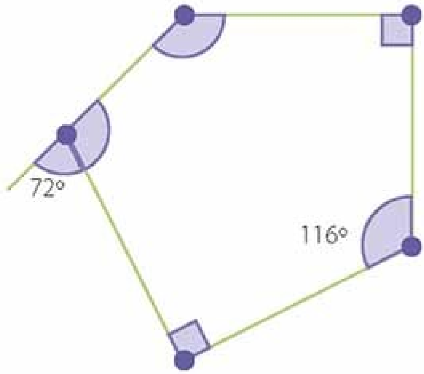
Los ángulos centrales y exteriores de cualquier polígono regular miden lo mismo.

Ponlo en práctica

individual

14. Calcula la medida de los ángulos marcados en cada figura, sin medir.





15. Resuelve.

a) Juan construyó un corral con forma de polígono regular. Si los ángulos interiores miden 144°, ¿cuántos lados tiene el corral? ______________________

b) Si las diagonales de un polígono convexo que salen desde un vértice son 9, ¿cuánto suman sus ángulos interiores? ______________________

c) Si los ángulos interiores de un polígono suman 2 700°, ¿en cuántos triángulos de pueden dividir trazando diagonales desde un vértice? ______________

16. Completa la siguiente tabla.

Lados del polígono regular	Triángulos en que se divide desde un vértice	Suma de sus ángulos interiores	Medida de sus ángulos interiores	Medida de sus ángulos centrales y exteriores
9				
13				
15				
18				
24				
30				
32				

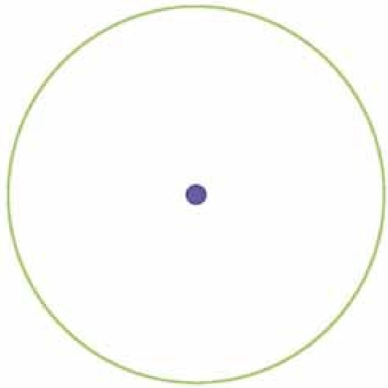
Construcción de polígonos regulares

Propósito Aprenderás a trazar polígonos regulares a partir de diferente información.

individual

Roberto tiene que cortar un espejo circular para hacer uno con forma de hexágono regular, de manera que todos sus vértices queden sobre la circunferencia.

a) Considera la siguiente figura como el espejo y, con tus instrumentos de geometría, realiza los trazos necesarios para construir el hexágono.



b) Describe el procedimiento que seguiste para construir el polígono.

c) ¿Qué valores permiten afirmar que el hexágono que trazaste es regular?

2. Analiza lo que hicieron varios estudiantes para construir el hexágono.

- Elena: dibujé un triángulo equilátero. Después, tracé la **mediatriz** de los lados y uní los vértices del triángulo con los puntos donde las mediatrices cortan a la circunferencia.
- Raúl: divide la circunferencia en ángulos centrales de 60º, desde su centro, y uní los puntos donde los ángulos cortan a la circunferencia.
- Ximena: marqué un punto sobre la circunferencia y tracé un ángulo de 120º. Después, con vértice en el punto donde un lado del ángulo corta la circunferencia, trace otro ángulo de 120º, y así sucesivamente hasta completar el hexágono.

a) ¿Utilizaste alguno de estos procedimientos?

b) Realiza los trazos en tu cuaderno, siguiendo los tres procedimientos o los dos que no utilizaste para validar que son correctos.

c) ¿Qué condición permite asegurar que se construyó correctamente el hexágono regular en cada caso?

Glosario

Mediatriz. Recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.

pareja

3. Reúnete con un compañero y comenten sobre los procedimientos descritos. ¿Todos son factibles para cualquier tipo de polígono regular? ¿Por qué? ¿A partir de qué medidas será posible construir un polígono regular? Discutan lo anterior y validen su postura con la de otros compañeros.

pareja

4. En parejas, realicen los trazos que se indican para construir polígonos regulares.

- Tracen ángulos adyacentes de la medida que se muestra, cuyo vértice esté sobre el punto correspondiente, hasta regresar al primer ángulo.
- Tracen una circunferencia desde el vértice de los ángulos y unan los puntos donde la circunferencia corte los lados de los ángulos.

a) 45º b) 72º c) 36º

d) ¿Qué polígonos formaron? ______________________________

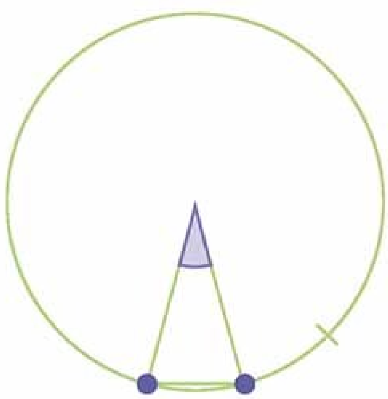
____

e) ¿Cuántos grados tendrían que medir los ángulos centrales para trazar un polígono de 15 lados? ______________________________

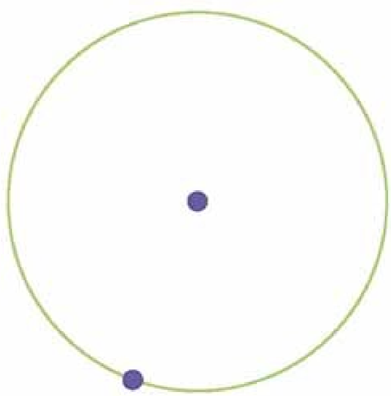
5. Construyan los polígonos inscritos en las circunferencias, de la siguiente manera.

Tracen un ángulo central de cada polígono y marquen los puntos donde intersecan a la circunferencia. Abran su compás a la medida de los dos puntos anteriores y reproduzcan dicha medida sobre la circunferencia, como muestra el ejemplo, hasta completar la vuelta.

a) Dodecágono



b) Nonágono

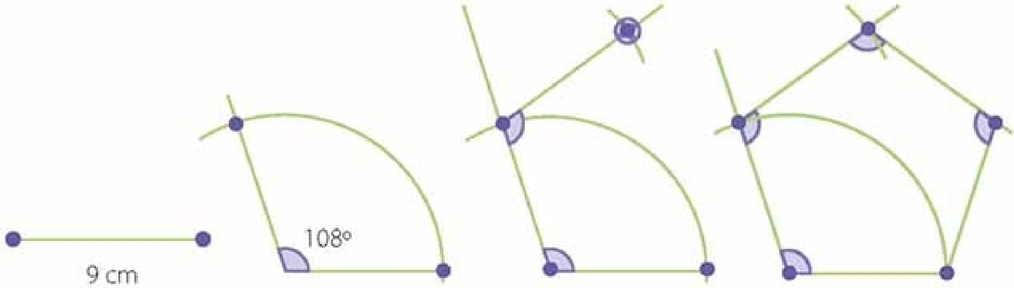


Como pudieron ver, los procedimientos anteriores permiten construir polígonos regulares inscritos en una circunferencia a partir de su ángulo central.

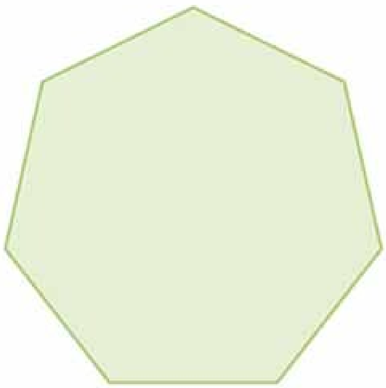
Glosario

Ángulo adyacente. Ángulo que comparte vértice con otro ángulo y tienen un lado en común.

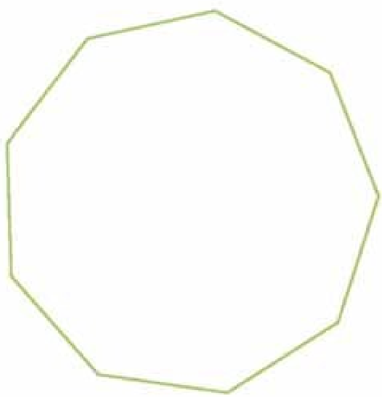
6. Analicen el siguiente procedimiento que muestra cómo construir un pentágono regular cuando se conoce la medida de sus lados a partir de sus ángulos interiores. Describan el procedimiento.



7. Construyan un heptágono regular congruente al que se muestra, siguiendo el procedimiento anterior.



8. Traza un polígono regular dentro del recuadro que se muestra, con escala igual a 2:1.5.

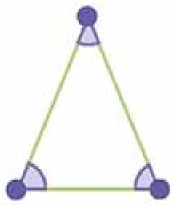


9. Analicen el siguiente procedimiento y realicen lo que se pide.

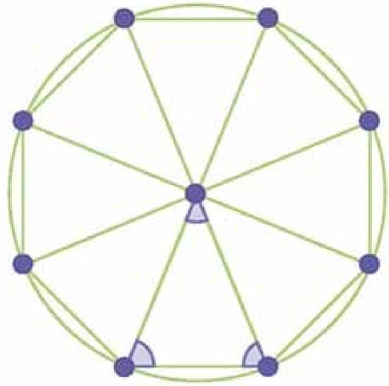
Hilda trazó un octágono regular de 10 cm de lado inscrito en una circunferencia, como se muestra.

Ella explicó que para construir el polígono, consideró que todo polígono regular se divide en el mismo número de triángulos congruentes.

Entonces, su primer paso fue construir uno de los triángulos considerando el lado de 10 cm y la medida de los ángulos del triángulo.



10 cm



10 cm

a) ¿Cuánto miden los ángulos de cada triángulo? ______________________

____

b) Después de trazar el triángulo, ¿qué procedimiento siguió Hilda para trazar el octágono inscrito en una circunferencia? ______________________

____

10. Consideren los siguientes segmentos como un lado de cada polígono regular y, siguiendo el procedimiento de Hilda, construyan las figuras.

a) Pentágono

b) Hexágono

equipo

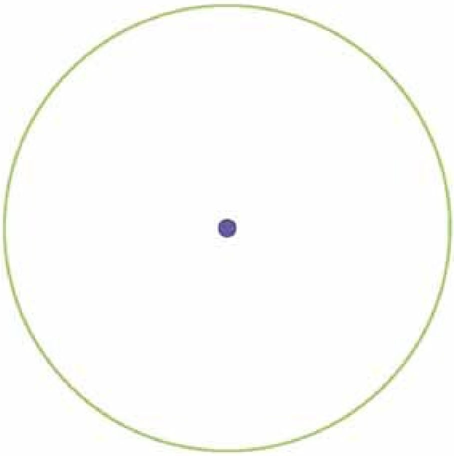
11. Reúnete con otros compañeros para comentar los procedimientos vistos en la lección para construir polígonos regulares. Con la guía del maestro discutan sobre si alguno les parece más eficiente que otro y cuál usarían considerando diferentes condiciones. Registren sus acuerdos.

individual

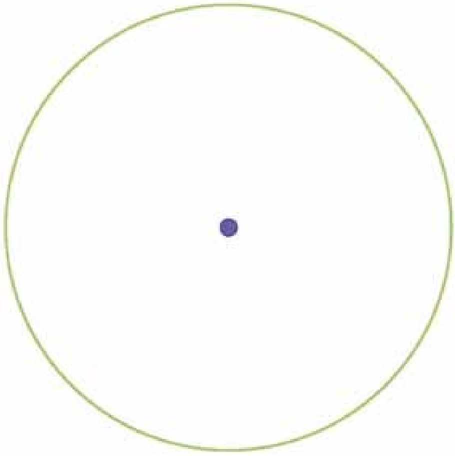
12. Construye los siguientes polígonos regulares inscritos en cada circunferencia.

Ponlo en práctica

a) De 4 lados



b) De 16 lados



13. José quiere construir un corral con forma de octágono regular, cuyos lados midan 4 m. Construye a escala el corral de José. Considera que 1 m en la realidad representa 0.5 cm en tu figura.

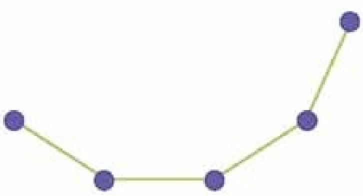
a) ¿Cuánto mide el perímetro del corral? ______________________

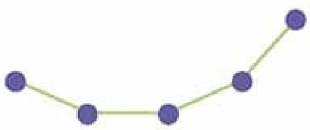
____

b) ¿Cuánto mide el perímetro de tu figura? ____________________

____

14. Completa la construcción de los siguientes polígonos regulares.





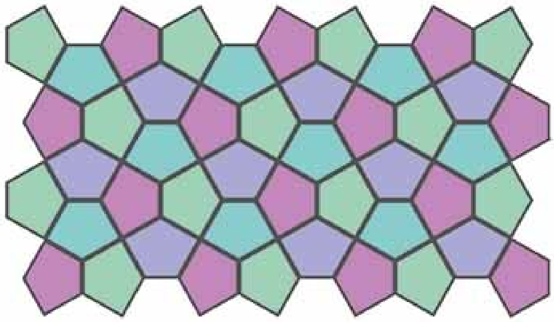
Construcción de teselados

Propósito Identificarás los polígonos regulares con los que es posible cubrir el plano y construirás tus propios teselados.

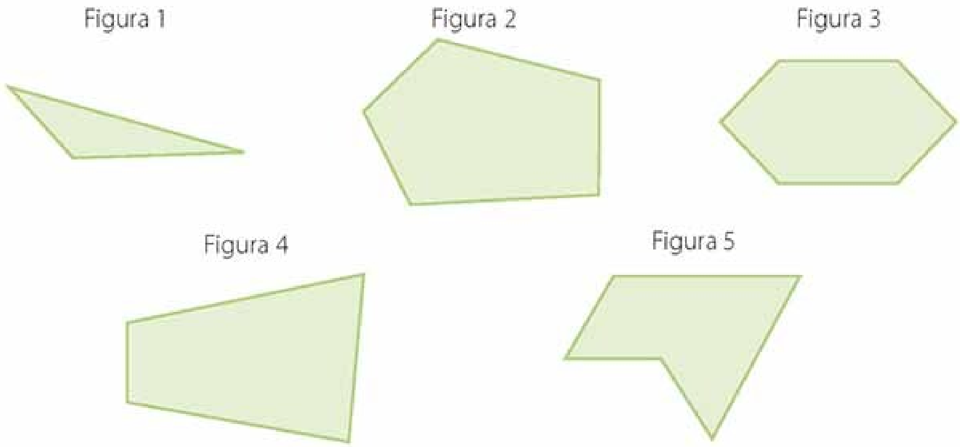
pareja

1. En parejas lean la información y resuelvan las actividades.

Los teselados o teselaciones son regularidades o patrones de figuras que permiten cubrir una superficie plana, con la condición de que no queden huecos entre ellas ni se sobrepongan, como se muestra en la siguiente imagen.



a) Calquen varias veces las siguientes figuras, acomódenlas como piezas de un rompecabezas y determinen con cuáles se puede formar un teselado.



b) ¿Con qué figuras pudieron formar un teselado? ______________________

____

c) En los casos anteriores, ¿cuántos grados suman los ángulos de las figuras que coinciden en un mismo vértice? ______________________

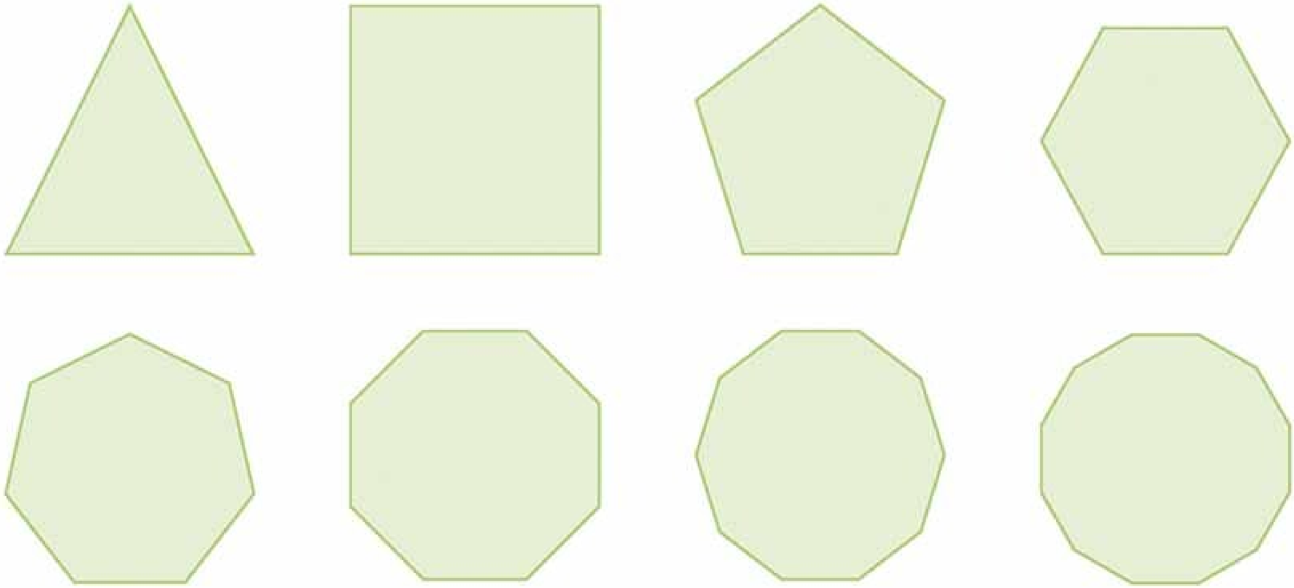
equipo

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten las características de las figuras que permiten formar un teselado. Registren sus acuerdos con el apoyo del profesor.

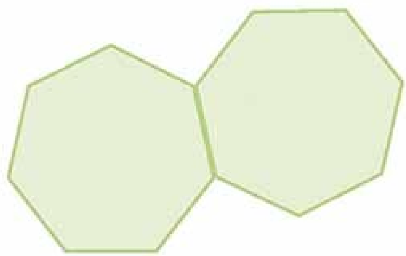
3. Reúnanse en equipos para resolver las siguientes actividades.

a) En una hoja de papel, en cartulina o en algún otro material resistente, construyan los siguientes polígonos regulares, varios de cada uno. Los lados de todas las figuras deben tener la misma medida.

b) Si tiene la posibilidad, tracen las figuras y fotocopien por lo menos seis veces cada una.



c) Acomoden las figuras como si fueran piezas de un rompecabezas, intentando que cubran el plano sin que queden huecos entre ellas ni se sobrepongan, como muestra el ejemplo.



4. Respondan las siguientes preguntas, a partir de sus construcciones.

a) ¿Con qué figuras pudieron cubrir el plano sin dejar huecos y sin que se sobrepusieran? ____

____

b) En las construcciones que cubrieron el plano, ¿cuánto suman los ángulos que coinciden en un mismo vértice? ____

c) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de los polígonos que les permitieron cubrir el plano? ____

____

pareja

5. Completen la siguiente tabla.

Polígono regular	Medida de sus ángulos interiores	$\frac{\text{Ángulo completo (360°)}}{\text{Medida del ángulo interior}}$
Triángulo		
Cuadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Octágono		
Decágono		
Dodecágono		

a) ¿En qué casos el resultado es un número exacto? ____________________

____

b) ¿Combinando qué polígonos regulares podrían formar un teselado? Expliquen su respuesta. ____________________

____

____

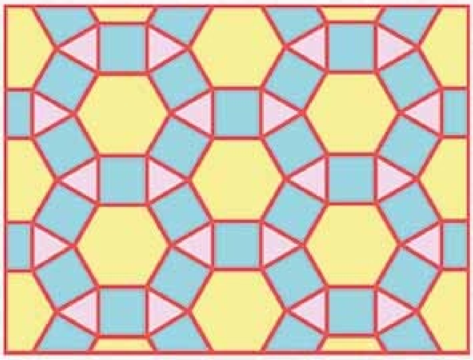
equipo

6. Comparen su última respuesta con las de otros equipos. Si no coinciden, revisen dónde puede estar el error.

Para formalizar

pareja

7. Realicen en pareja una lectura comentada de la siguiente información y validen sus respuestas de las actividades anteriores.



Una característica de los teselados es que las figuras que coinciden en un mismo vértice deben sumar 360º.

Los únicos polígonos regulares que permiten formar un teselado son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. A estos teselados se les conoce como **teselados regulares**.

También existen los llamados **teselados semirregulares**, que son construcciones que se forman con dos o más polígonos regulares, de manera que las figuras que coinciden en un mismo vértice siguen el mismo patrón, como el teselado que se muestra en la imagen de arriba.

equipo

8. Recuperen las figuras que construyeron antes para realizar las siguientes actividades.

Los teselados semirregulares que se pueden formar son ocho. De uno de ellos ya se habló en la página anterior.

a) ¿Qué polígonos se utilizan en el polígono de la página anterior? ______________________

b) Escriban como una suma las medidas de los ángulos que coinciden en un mismo vértice. ______________________

c) Otros de los teselados que se pueden formar combinan únicamente triángulos y cuadrados. ¿Cuántas figuras de cada tipo coinciden en un mismo vértice? Justifiquen su respuesta. ______________________

9. En el siguiente espacio, construyan dos teselados semirregulares. Tracen únicamente las figuras que coinciden en un solo vértice para completar un ángulo de 360º.

grupo

10. Comparen sus teselados con los de otros equipos. Si en el grupo no obtuvieron los ochos teselados semirregulares, con el apoyo del profesor combinen otras figuras para hacerlos en su cuaderno.

Consulta en...

Ingresa en http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html para conocer más sobre los teselados regulares y semirregulares.

Ponlo en práctica

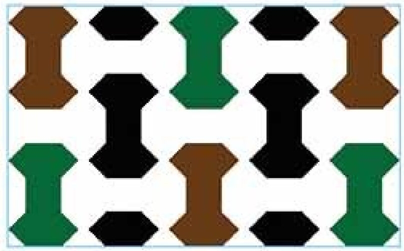
individual

11. Lee la información y resuelve.

La siguiente imagen de la izquierda muestra uno de los teselados que hay en el Palacio La Alhambra. Como puedes ver, se forma a partir de deformar un triángulo. La figura de la derecha representa otro teselado, llamado Hueso de Nazarí.

En mi entorno

En el Palacio de La Alhambra, que está en la ciudad de Granada, España, las paredes y pisos están cubiertos por teselados. Busca en Internet información sobre el origen de éstos en dicha construcción y compártela con tus compañeros y con el profesor.

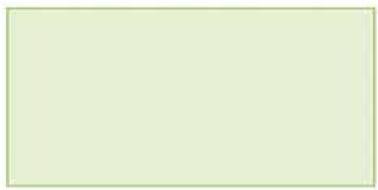


a) ¿A partir de qué polígonos se puede construir el Hueso Nazarí? ____________________

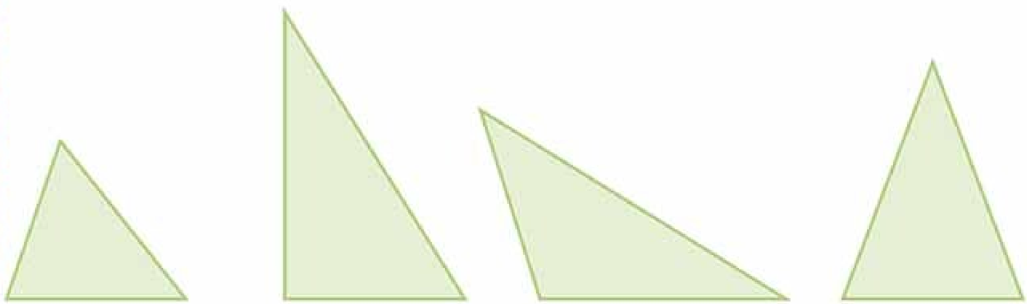
____

b) Elige la figura para construir el Hueso de Nazari y trázala en una hoja de papel reciclado, recórtala para formar el patrón y arma un teselado con ella.

12. Realiza los cortes que consideres necesarios en el siguiente rectángulo de manera que puedas formar un teselado. Considera que lo que elimines o cortes en un lado se agrega en otro. Reproduce tu figura varias veces para formar el teselado.



13. Elige los triángulos con los que puedes formar un teselado.



a) ¿Podrías afirmar que con cualquier triángulo se pude construir un teselado? Justifica tu respuesta. ____________________

____

____

b) En un teselado, ¿cuántos triángulos deben coincidir en un mismo vértice? ¿Por qué? ____________________

____

____

individual

Integramos

1. Responde.

a) ¿Cuántas diagonales tiene, en total, un polígono convexo de 8 lados? ____________

b) Si en un polígono convexo se pueden trazar 16 diagonales desde un vértice, ¿cuántos lados tiene? ____________

c) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono de 17 lados? ____________

d) Si la suma de los ángulos interiores de un polígono es de 3 600º, ¿cuántos lados tiene? ____________

2. Construye los siguientes polígonos regulares: uno de 12 lados a partir de sus ángulos centrales y otro de nueve lados a partir de sus ángulos interiores.

3. Elige las figuras con las que puedes combinar un dodecágono regular para formar un teselado.

Dos hexágonos	Un cuadrado y un hexágono
Un triángulo y otro dodecágono	Un octágono y un hexágono
Dos cuadrados	Tres triángulos

4. Construye un teselado con un trapezoide.

Aprendizaje esperado: Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

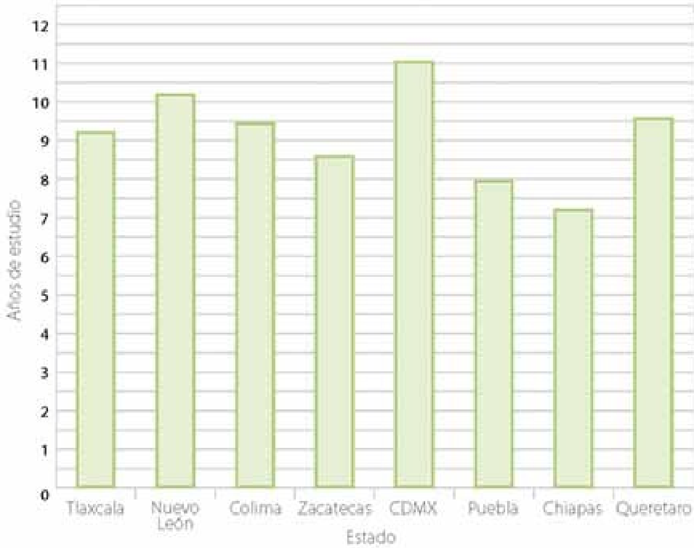
Histogramas y gráficas poligonales y de línea

Nivel de estudios en gráficas y tablas

individual

Exploramos

1. Lee la información, analiza la gráfica y resuelve.



Fuente: cuentame.inegi.org.mx/poblacion/menu_edu.aspx?tema=P

La siguiente gráfica muestra el promedio de años de escolaridad en personas mayores de 15 años en algunos estados de la República Mexicana, en 2015, según datos del Inegi. Los estados fueron elegidos al azar.

a) ¿Cuáles son las entidades con mayor y menor nivel de escolaridad? ______

b) ¿Cómo se muestra lo anterior en la gráfica? ______

c) ¿Cuál es la diferencia entre los dos estados anteriores? ______

d) ¿Qué estados están por debajo del promedio nacional, que es de 9.1 años de escolaridad? ______

En mi entorno

Para conocer el nivel de educación de una población determinada, se calcula el número de años (o grados escolares) promedio de la misma.

En la siguiente página del Inegi http://cuentame.inegi.org.mx/ puedes conocer la situación de todos los estados de la República Mexicana en cuanto a población y escolaridad.

Investiga el nivel de escolaridad de una muestra de tu comunidad y comparte tu trabajo con tus compañeros.

2. Completa la tabla a partir de la siguiente información.

La siguiente lista muestra los resultados de una encuesta sobre el número de años de estudio de los 45 trabajadores de una empresa.

7	12	10	3	8	14	12	11	12	18	8	13	18	10	16
13	16	6	5	9	18	11	2	5	11	15	10	6	14	11
12	10	15	9	15	4	16	8	12	14	7	9	13	16	9

Años de estudio	4 o menos	De 5 a8	De 9 a 12	13 o más
No. de personas				

a) ¿Cómo consideras el nivel de escolaridad en la empresa? ¿Por qué? ______

pareja

3. Compara tus respuestas con las de uno de tus compañeros. Comenten las ventajas de ordenar la información en grupos. ¿Sería conveniente ordenar la información año por año de escolaridad? ¿Por qué? Registren sus conclusiones en el cuaderno.

Histogramas

Propósito Organizarás conjuntos de datos por medio de intervalos y representarás dicha información en un histograma.

◂ Transitamos

pareja

1. En parejas, resuelvan las siguientes actividades.

La prueba o test *Cooper* se realiza a los atletas para evaluar su condición física. Consiste en recorrer la mayor distancia posible en 12 minutos.

La siguiente lista muestra la distancia, en metros, que recorrió un grupo de atletas de alto rendimiento durante la prueba *Cooper*. Las distancias fueran redondeadas para facilitar su registro y conteo.

1 910, 1 930, 1 950, 1 950, 1 990, 2 025, 2 070, 2 080, 2 080, 2 100, 2 100, 2 120, 2 150, 2 150, 2 170, 2 190, 2 200, 2 210, 2 210, 2 230, 2 250, 2 350, 2 360, 2 380, 2 400, 2 430, 2 430, 2 460, 2 460, 2 475, 2 490, 2 500, 2 510, 2 510, 2 530, 2 540, 2 550, 2 550, 2 580, 2 630, 2 640, 2 640, 2 650, 2 660, 2 660, 2 710, 2 730, 2 750

a) ¿Cuántos atletas hicieron la prueba? ______________________

b) ¿Cuál es el rango del conjunto de datos? ______________________

c) ¿Una gráfica de barras sería conveniente para ordenar y representar la información? ¿Por qué? ______________________

____

Glosario

Rango. La diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de un conjunto de datos.

2. Discutan en pareja acerca de la manera más conveniente de representar los resultados de la prueba. Realicen un registro en el siguiente espacio.

3. Comparen su registro con el de otros compañeros. Expongan sus argumentos sobre su trabajo y escuchen los de sus compañeros. Al final, con el apoyo del profesor, busquen llegar a acuerdos sobre la manera más eficiente de registrar la información. Ésta debe ser clara para cualquier persona.

pareja

4. Continúen trabajando en pareja, retomen la actividad anterior y resuelvan.

Como pudieron ver, la cantidad y la variedad de valores del conjunto de datos hacen que representarlos en una gráfica de barras o en una tabla, dato por dato, resulte complejo y poco práctico. Por ello, ordenar la información en una tabla de datos agrupados por **intervalos** resulta muy conveniente, como se muestra. Analicen los valores de la tabla y respondan..

Glosario

Intervalo. Conjunto de números que se encuentran entre dos números dados.

a) Completen la tabla con los datos de la página anterior.

Consideren que todos los intervalos deben tener el mismo rango y que cada intervalo incluye todos los valores iguales o mayores que el valor mínimo y menores que el valor máximo.

La **marca de clase** es igual a la media de los valores extremos de cada clase.

Clases	Intervalo de clase (m)	Frecuencia	Marca de clase
1	1 900 – 2 070		1 985
2	2 070		
3			
4			
5	2 750		

b) ¿En cuántas clases de dividió la información? ______

c) ¿Qué relación hay entre el rango del conjunto de datos y el rango de cada clase?

______

Otra vista

Recuerda que en datos agrupados, la media es igual a la suma de las multiplicaciones de cada valor por su frecuencia y que el resultado se divide entre el total de datos.

d) ¿Cómo se obtuvo cada intervalo de clase? ______

e) ¿Cuál es el rango en cada intervalo? ______

f) ¿Qué intervalo tuvo mayor frecuencia? ______

g) ¿Qué clase se repitió menos veces? ______

h) ¿Qué ventajas tiene representar la información agrupada por clases o intervalos?

______

______

i) Si la marca de clase es considerada como el valor representativo de cada clase o conjunto de datos, ¿cuál fue el promedio de metros recorridos por los atletas?

______

j) ¿Cuántos valores hay por arriba y por debajo de la media? ______

______

d) ¿Su registro fue similar a éste? ¿Cuál fue la diferencia?, ¿en qué se parecen?

______

Una forma de representar información agrupada por intervalos son las gráficas de barras llamadas **histogramas**.

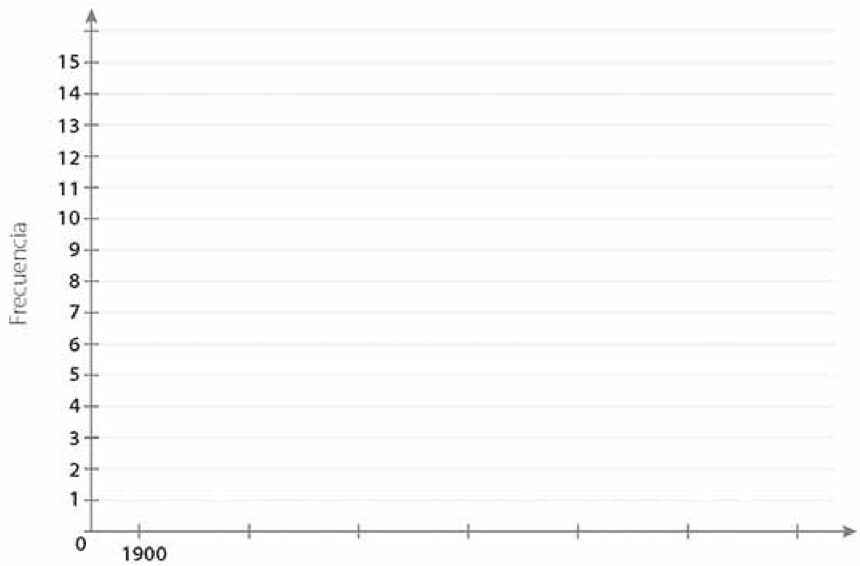
5. Representen los datos de la tabla de la página anterior en un histograma, a partir de la siguiente información.

a) ¿Qué información tiene que ir en cada eje? ___

b) Considerando que en un histograma las barras van pegadas, ¿qué valores numéricos tienen que ir sobre el eje horizontal? ___

c) Completen el histograma a partir de la información anterior..

Resultados de la prueba Cooper



Metros recorridos

d) ¿Por qué consideran que las gráficas van pegadas? ___

e) ¿Qué conclusiones pueden obtener sobre el rendimiento de los atletas de acuerdo con el histograma? ___

6. Revisen su histograma con el resto del grupo. Si tienen dudas, busquen el apoyo del profesor para aclararlas. Discutan sobre las ventajas de trabajar con datos agrupados y la diferencia entre un histograma y las gráficas de barras. Registren las diferencias. ___

Para formalizar

pareja

7. En parejas, realicen una lectura comentada del siguiente texto.

Los **histogramas** son gráficas de barras que permiten representar datos agrupados por intervalos, llamados **intervalos de clase**. La diferencia entre un histograma y una gráfica de barras es que el histograma representa valores continuos, por ello, sus barras van pegadas.

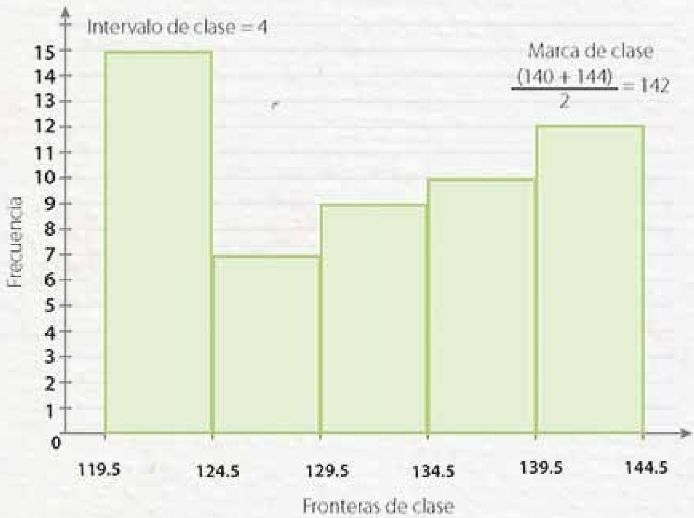
Todos los intervalos de clase tienen el mismo ancho, para ello, se divide el rango entre el número de intervalos. Es recomendable utilizar entre 4 y 6 de éstos.

Se conoce como **límite de clase** a los valores extremos de cada intervalo.

Un **intervalo es abierto**, por ejemplo, (a, b), cuando contiene valores mayores que a y menores que b. Para trabajar con intervalos abiertos, se resta 0.5 al límite y se le suma 0.5 al valor mayor de cada intervalo. Así se garantiza que todos los valores queden dentro de un intervalo.

A estos valores se les conoce como **fronteras de clase**. En el ejemplo, el límite de clase del primer intervalo es: 120 – 124, y del segundo: 125 – 129, y la frontera de clase es 119.5 – 124.5 y 124.5 – 129.5, respectivamente.

La **marca de clase** representa el punto medio de cada barra y se considera como el valor representativo de cada intervalo de clase.



8. Inventen una situación y un conjunto de valores que representen la información del histograma anterior. Después, completen la siguiente tabla.

Clase	Fronteras de clase	Intervalo de clase	Frecuencia	Marca de clase
1	119.5 – 124.5	120 – 124		
2	124.5 – 129.5			
3	129.5 - 134.5			
4	134.5 - 139.5			
5	139.5 - 144.5			

9. Planteen un par de preguntas que puedan responderse con la información, a partir de la situación que inventaron. Compartan su trabajo con otros compañeros para validarlo.

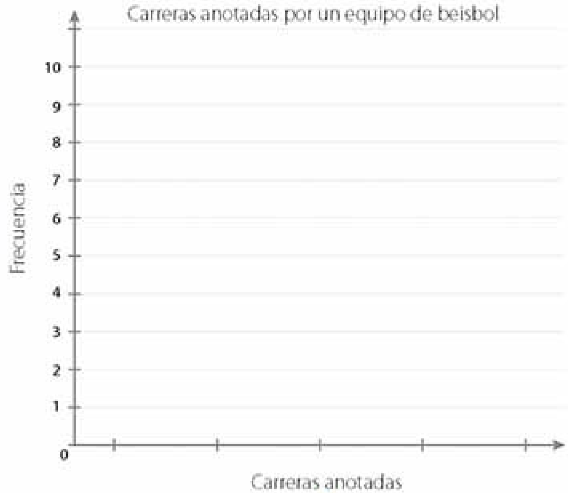
Ponlo en práctica

10. Lee la información, ordena los datos de menor a mayor, completa la tabla y construye el histograma correspondiente.

La siguiente lista muestra el número de carreras anotadas por un equipo de béisbol durante cada partido de una temporada.

2	4	3	6	10	14	6	9	5	5
12	1	9	6	3	3	11	13	1	8
7	16	8	12	14	10	5	8	16	9

Clase	Intervalo de clase	Fronteras de clase	Frecuencia	Marca de clase
1				
2				
3				
4				



a) ¿Qué intervalo de clase tiene mayor frecuencia? ____________

b) ¿Cuántos partidos jugó el equipo? ____________

11. Realiza una encuesta en tu grupo o escuela. Pregunta a 40 compañeros el tiempo promedio, en minutos, que dedican a hacer tarea en su casa.

Completa la tabla con la información en cinco intervalos de frecuencia y construye el histograma correspondiente.

Clase	Intervalo de clase	Fronteras de clase	Frecuencia	Marca de clase
1				
2				
3				
4				
5				

Polígonos de frecuencia

Propósito Construirás polígonos de frecuencia a partir de un histograma y analizarás la información que muestra para responder preguntas al respecto.

equipo

1. Lean la siguiente información y realicen lo que se pide.

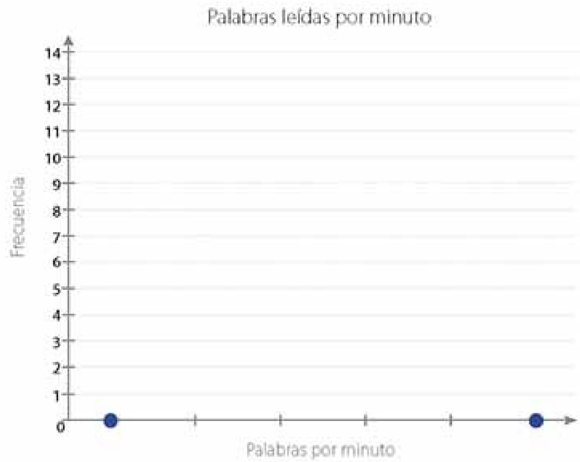
La velocidad de lectura es la habilidad para pronunciar palabras escritas en un determinado lapso de tiempo intentando comprender lo que se lee. Esta velocidad se evalúa por el número de palabras leídas por minuto.

La siguiente lista muestra el número de palabras por minuto leídas por un grupo de estudiantes de segundo de secundaria (2º A) durante una prueba de lectura.

131	134	135	135	138	139	140	140	140	141
142	142	144	144	145	145	145	145	146	147
147	147	147	149	149	150	150	151	152	152
152	153	153	153	154	154	155	156	158	160

a) Completen la tabla apartir de la información anterior.

Clase	Fronteras de clase	Intervalo de clase	Frecuencia	Marca de clase
1	131			
2				
3				
4				
5	160			



b) Construyan el histograma correspondiente en el siguiente plano.

Los estándares nacionales indican que un alumno de segundo de secundaria debe leer entre 145 y 154 palabras por minuto

c) De acuerdo con lo anterior, ¿cómo consideran el nivel de lectura de este grupo? ______

______

d) Marquen un punto en el punto medio de cada barra, en la parte alta, y únanlos, iniciando y terminando en los puntos señalados sobre el eje *x*.

equipo

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Juntos describan el comportamiento del grupo, de acuerdo con la línea poligonal que trazaron. Discutan la función que tiene la línea y cómo podrían usarla para comparar el comportamiento de dos grupos en un mismo plano.

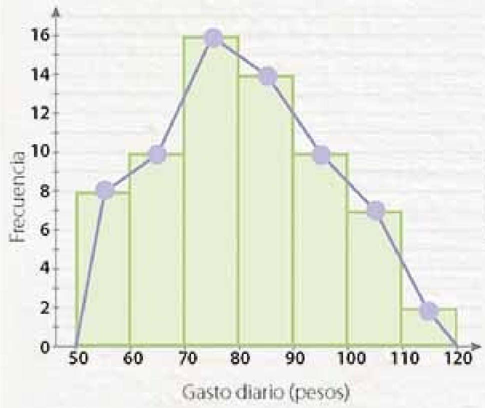
equipo

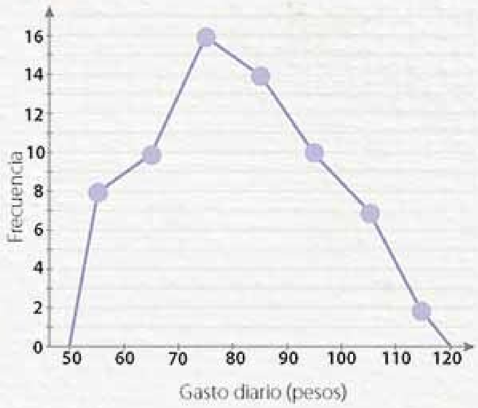
3. En parejas, realicen una lectura comentada del siguiente texto. Con la información obtenida, validen sus resultados de las actividades anteriores.

◂ Para formalizar

Una gráfica poligonal, llamada **polígono de frecuencias**, permite representar gráficamente información agrupada por intervalos, con valores continuos.

Un polígono de frecuencias está muy relacionado con un histograma, ya que se puede construir a partir de éste. Para formar el polígono se unen, en su parte más alta, los puntos medios de las barras mediante segmentos de recta. Dichos puntos corresponden a la **marca de clase** de cada intervalo, como muestra el ejemplo. Los polígonos de frecuencia empiezan y terminan en frecuencia cero.

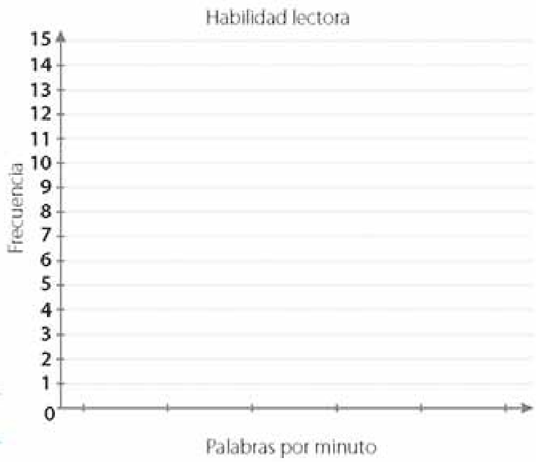




La diferencia entre un histograma y un polígono de frecuencias es que los polígonos permiten comparar dos grupos de datos en un mismo plano.

4. La siguiente tabla muestra los resultados de una prueba de habilidad lectora hecha a otro grupo de segundo de secundaria (2° B). Construyan el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente.

Clase	Intervalo de clase	Frecuencia
1	131 – 136	6
2	137 – 142	8
3	143 – 148	14
4	149 – 154	10
5	155 – 160	4



a) ¿Cuántos alumnos fueron evaluados? ______

______

equipo

5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros; si existen diferencias, revisen sus procedimientos y corrijan.

6. Construyan en el siguiente plano los polígonos de frecuencias correspondientes a los resultados de los dos grupos de secundaria, vistos en las actividades anteriores.

Consulta en...

Visita la siguiente página electrónica: https://www.geogebra.org/m/NVYyMMkt, que muestra material interactivo que puedes manipular modificando los intervalos. Puedes sustituir los valores que muestra y crear tu propio histograma y polígono de frecuencias.

Palabras leídas por minuto por dos grupos de 2º de secundaria

a) ¿En qué intervalo hubo más alumnos de cada grupo? ____________________

____

b) ¿En qué intervalo hubo menos alumnos de cada grupo? ____________________

c) ¿En qué intervalo hay mayor diferencia entre ambos grupos? ____________________

d) De acuerdo con los polígonos de frecuencias, describan el comportamiento de cada grupo.

2º A: ____

____

2º B: ____

____

e) ¿Qué grupo consideran que tuvo mejores resultados? Expliquen cómo se puede demostrar esto a partir de los polígonos. ____________________

____

grupo

7. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. ¿Qué significa que un polígono sea sesgado? Discutan, con el apoyo del profesor, sobre la relación entre la forma de los polígonos y el aprovechamiento de cada grupo. ¿Cómo sería el polígono de un grupo con la mayoría de alumnos por debajo de los estándares?

individual

8. Analiza el siguiente polígono de frecuencias y responde.

La gráfica muestra los datos de un estudio comparativo sobre la frecuencia cardíaca (pulsaciones por minuto), en reposo, de un grupo de pacientes de una clínica.

a) ¿Cuál es el rango del conjunto de datos? ______

b) ¿Cuál es el ancho de cada intervalo? ______

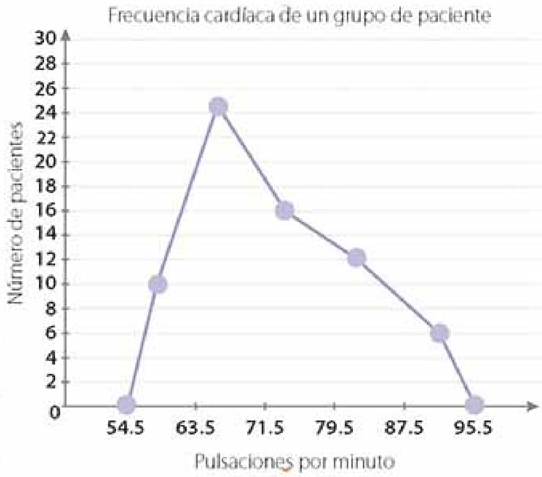
c) ¿Cuántos pacientes fueron estudiados? ______

d) ¿Qué tipo de gráfica representa el polígono? ______

______

e) ¿En qué intervalo se encuentra la mayoría de pacientes?

______



9. La siguiente lista muestra el número de aciertos que tuvieron dos grupos de estudiantes en una prueba previa al examen de admisión a bachillerato. La prueba fue de 75 reactivos, todos con valor de un punto.

Grupo 1					
41	42	43	44	49	50
50	51	53	53	54	55
55	57	58	58	58	60
62	63	64	64	66	66
67	68	69	71	75	75

Grupo 2					
36	39	40	43	45	46
50	52	52	54	55	57
58	58	59	60	61	61
62	64	64	65	65	66
66	68	71	72	72	74

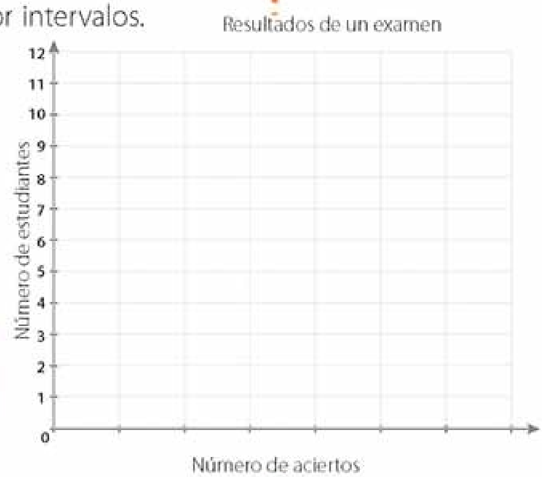
a) Construye en tu cuaderno las tablas correspondientes por intervalos. Forma cinco intervalos de clase. Determina el tamaño de cada intervalo y la marca de clase. Obtén el rango con el valor máximo y el mínimo de ambos grupos.

b) Después, construye los polígonos de frecuencias en el siguiente plano.

c) ¿Qué grupo consideras que tuvo mejor aprovechamiento? Explica por qué. ______

______

______



grupo

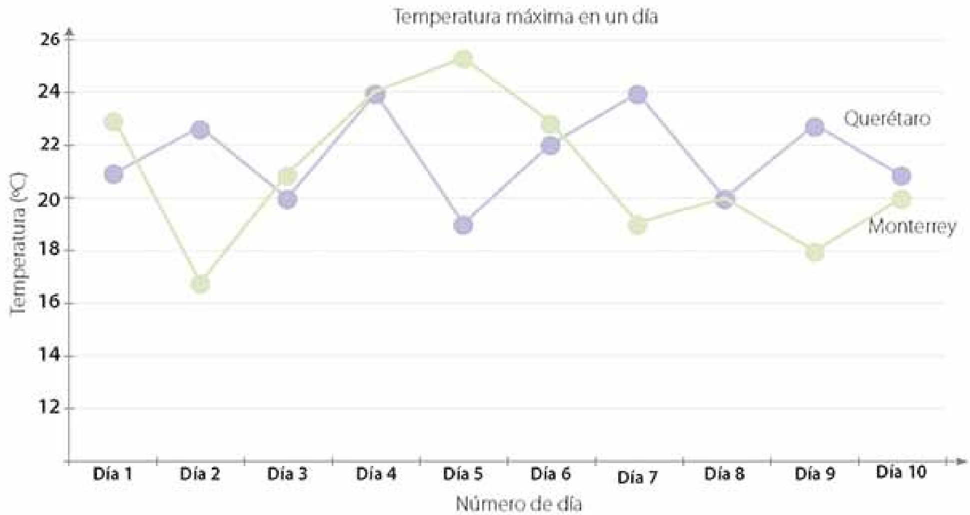
10. En grupo, obtengan su frecuencia cardiaca. Para ello, tomen su pulso durante 10 segundos y cuenten el número de latidos. Después, multipliquen el resultado por seis para obtener sus pulsaciones por minuto. Con el apoyo del profesor, registren su resultados en el pizarrón. En su cuaderno, elaboren la tabla y el polígono de frecuencias correspondiente.

Gráficas de línea

Propósito Construirás y analizarás información presentada en gráficas de línea.

pareja

1. Analicen, en parejas, la información de la siguiente gráfica y respondan.



a) ¿Qué información muestran las gráficas? ______

b) ¿En qué lugar se dio la temperatura más baja y cuál fue? ______

c) ¿En qué día ambas ciudades tuvieron la misma temperatura? ______

d) ¿Cuál es la diferencia en la temperatura de ambas ciudades? ______

e) ¿En qué ciudad hubo mayor variación de temperatura? ¿Cómo se aprecia esto en la gráfica? ______

f) ¿Qué diferencia hay entre esta gráfica y los polígonos de frecuencias que trabajaron en la lección anterior? ______

g) ¿Qué tipo de información podrían representar y comparar en una gráfica como la anterior? ______

pareja

2. Compartan sus resultados con otras parejas. En equipo, comenten sobre el tipo de información que podrían representar en estas gráficas y cuál es su utilidad. Discutan lo anterior en busca de acuerdos y compartan con el resto del grupo los que establezcan.

individual

3. Elabora una gráfica de línea a partir de los valores de la tabla.

La prueba de relevos 4×100 es, sin lugar a dudas, una de las competencias más espectaculares del atletismo. La siguiente tabla contiene los tiempos de los ganadores de la medalla de oro en los últimos ocho Juegos Olímpicos.

Año	Seúl 1988	Barcelona 1992	Atlanta 1996	Sídney 2000	Atenas 2004	Pekín 2008	Londres 2012	Río de Janeiro 2016
Tiempo en segundos	41.98	42.11	41.95	41.95	41.73	42.3	40.82	41

a) ¿Entre qué Juegos Olímpicos consecutivos se dio la mayor diferencia? ______

______

b) ¿Entre qué Juegos Olímpicos se dio la menor diferencia?

______

______

c) ¿En qué Juegos Olímpicos se dio el mejor y el peor tiempo? ______

______

d) Describan el comportamiento de los tiempos desde 1988 hasta 2016. ______

______

equipo

4. Discutan en equipo lo siguiente. ¿Dónde es más rápido realizar el estudio comparativo de los datos? ¿Qué ventajas tiene la representación gráfica de la información? Compartan sus conclusiones con otros equipos.

5. Lee la siguiente información. Si tienes dudas, exté rnalas al grupo y a tu profesor para aclararlas.

Para formalizar

Las **gráficas de línea** son similares a los polígonos de frecuencia, porque se componen de puntos, unidos por segmentos lineales. Este tipo de gráficas permiten representar y analizar cómo cambian los datos a través del tiempo. Por ello, son ideales para registrar, por ejemplo, las variaciones del precio del dólar, el cambio de temperatura, etcétera.

En el eje horizontal se colocan los periodos: horas, días, años, etcétera, y en el eje vertical los valores que corresponden a cada periodo.

Las gráficas de línea se llaman abiertas porque no inician ni terminan en cero, al contrario de los polígonos de frecuencias. Es importante no confundir las gráficas de línea con las gráficas que representan funciones lineales.

Ponlo en práctica

individual

6. Analiza la siguiente gráfica de línea y responde.

Se conoce como esperanza de vida al número de años que se espera que viva una persona. Si una población tiene una esperanza de vida alta, significa que tiene un buen desarrollo económico y social.

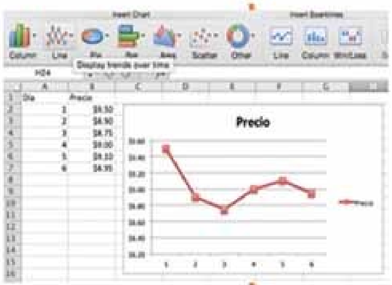
Fuente: cuentame.inegi.org.mx

a) ¿Quiénes tienen mayor esperanza de vida: las mujeres o los hombres? ______

b) ¿En qué año se dio la menor diferencia y en cuál la mayor? ______

c) ¿Ha aumentado o disminuido la esperanza de vida con el paso de los años? ¿A qué creen que se debe el cambio? ______

d) Calcula el promedio de vida en cada año y construye en tu cuaderno la gráfica de línea correspondiente.



7. En una hoja electrónica, construye una gráfica de línea:

a) Abre el archivo y copia la información que quieras representar. En la columna A, anota los valores correspondientes al tiempo y, en la columna B, sus magnitudes, en la misma fila.

b) Selecciona todos los datos y presiona la opción "Gráfica de línea". En la pantalla aparecerá la gráfica correspondiente, como muestra el ejemplo.

c) ¿Qué información registraste y por qué la elegiste?

d) ¿Qué características tiene la gráfica de línea que construiste?

8. Investiga la masa promedio ideal o normal de hombres y mujeres desde su nacimiento hasta los 15 años, de acuerdo con los datos de la OMS (Organización Mundial de la Salud) y construye las gráficas de línea correspondientes en un mismo plano.

a) Realiza un informe sobre como se da el aumento en hombres y mujeres a lo largo de los 15 años.

9. Comparte tu trabajo con el de otros compañeros y con el profesor.

individual

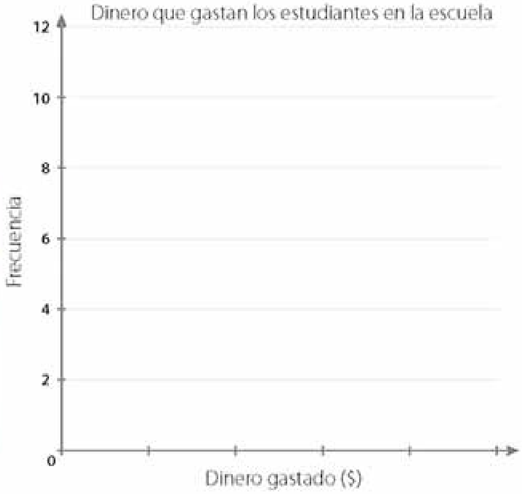
1. Analiza la información, completa la tabla y construye el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente.

◂ Integramos

Se le pregunto a un grupo de alumnos de secundaria cuánto dinero gastaron durante el receso en un día determinado y las respuestas fueron las siguientes.

60	48	14	28	35	18	18	20	22	24	58	60	45
24	25	25	48	40	28	30	32	34	35	45	15	12
35	35	12	38	39	15	40	40	43	50	25	52	55

Clase	Intervalo de clase	Fronteras de clase	Marca de clase	Frecuencia
1	11			
2				
3				
4				



a) ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados? ______

b) ¿Qué características tiene el histograma y el polígono de frecuencias? ______

______

2. Analiza la gráfica de línea y realiza lo que se pide.

La siguiente gráfica muestra cómo se ha modificado la temperatura en la Tierra a través de los años debido al calentamiento global, provocado por la emisión de gases de efecto invernadero, que retienen el calor.

a) Describe cómo ha sido el cambio en la temperatura del planeta con el paso de los años. ______

______

______

______

Fuente: productosquimicosymedioambiente.com/el-grafico-de-la-onu-desde-el-2000-sobre-el-calentamiento-global-no-tiene-precedentes/

b) Investiga más sobre el calentamiento global, qué son los gases de efecto invernadero y cómo puedes contribuir a evitar que la temperatura de la Tierra siga aumentando.

3. Comparte tu investigación con tus compañeros de grupo y, bajo la supervisión del profesor, discutan al respecto.

Hasta
DÓNDE LLEGUÉ

1. Contesta las siguientes preguntas.

a) Alicia compró $6\frac{1}{2}$ m de listón, que cortó en seis pedazos del mismo tamaño. ¿Cuánto mide cada pedazo de listón como fracción? ______

- ¿Cuál es la medida como número decimal? ¿Es exacta? ______

b) ¿Qué distancia se recorre en 2 vueltas y un cuarto en una pista que tiene 1.7 km de longitud?

______

2. La siguiete tabla muestra la relación entre las medidas de dos figura hechas a escala. Con base en la información, anoten las medidas que faltan.

Medida de los lados en la figura original (cm)	Medida de los lados correspondientes en la figura a escala (cm)
6	12.8
	9.6
12	
	13.6
	17.6

3. ¿Cuál es el resultado de la división $\frac{27}{8} \div \frac{3}{7}$?

a) $\frac{19}{8}$ b) $\frac{23}{4}$ c) $\frac{63}{8}$ d) $\frac{9}{56}$

4. Carlos recibió el estado de cuenta que mostraba un saldo de −$5 640, debido a que compró una cámara fotográfica.

a) ¿Cuál será su saldo después de tres meses o de tres pagos de la cámara? ______

b) ¿Qué operaciones de números positivos y negativos permiten obtener la respuesta? ______

Movimientos del mes

Saldo anterior

$0.00

Saldo nuevo

12 meses sin intereses:

$−5 640.00

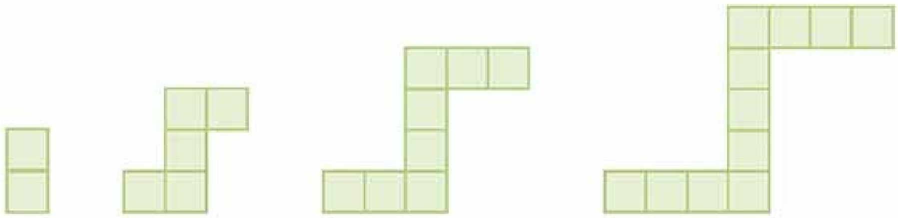
5. Resuelve.

a) ¿Por qué número se tiene que multiplicar –8.2 para obtener 49.2? ______________

b) ¿Cuál es el resultado de la operación: $3 \times (-2.4) + (-0.35)$? ______________

c) Resuelve: $6.5 \times 3.2 \div (-4) + 2.6 =$ ______________

6. Analiza la siguiente sucesión de figuras y elige las expresiones algebraicas que muestran la regla.



$4n + 3$ $\quad$ $3n - 1$ $\quad$ $2 + 3(n - 1)$ $\quad$ $2 + 3n - 3$

7. Escribe de dos maneras diferentes la regla de la siguiente sucesión:

57, 51, 45, 39, 33, 27, 21,…

Reglas 1: ______________

Regla 2: ______________

8. ¿En qué polígono la suma de sus ángulos interiores es de 1 080°?

9. Usando la fórmula: $\frac{(180\,(n-2))}{n}$, donde n representa el número de lados, ¿qué información de un polígono regular se puede obtener?

a) Los triángulos en los que se puede dividir

b) La medida de sus ángulos exteriores

c) La medida de sus ángulos centrales

d) La medida de sus ángulos interiores.

10. Responde.

a) ¿En qué polígono regular la suma de un ángulo central y de uno interior es igual a 180º? ______

b) ¿Qué polígonos regulares permiten formar un teselado? ______

c) Si se combinan dos octágonos regulares con un cuadrado, ¿se puede formar un teselado? ¿Por qué? ______

11. ¿Cuál de las siguientes combinaciones de figuras permiten formar un teselado? Considera que son las figuras que coinciden en un mismo vértice.

a) Cuadrado, cuadrado, triángulo, triángulo y triángulo

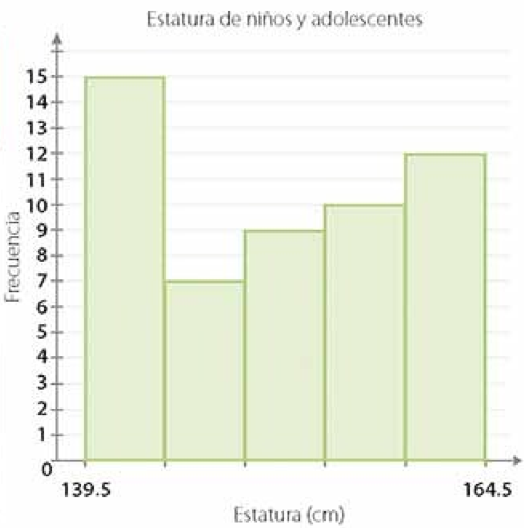
b) Triángulo, triángulo y hexágono

c) Hexágono, cuadrado, cuadrado, triángulo

d) Octágono, hexágono y triángulo

12. Completa la tabla a partir del histograma, que muestra la estatura de un grupo de niños y adolescentes que acude a un club deportivo a tomar diferentes clases. Considera la información del límite inferior y el superior del histograma.

Clase	Fronteras de clase (cm)	Marca de clase (cm)	Frecuencia
1	139.5		
2			
3			
4			
5	164.5		



Autoevaluación

Lee los siguientes enunciados y utiliza los parámetros para evaluar el logro de tus aprendizajes durante el bloque. Anota en la columna de la derecha el número que corresponde a tu desempeño.

1 = Insuficiente	2 = Bajo	3 = Me cuesta trabajo	4 = Lo logré

Indicadores	Desempeño
Resuelvo problemas de multiplicación de fracciones y números decimales.	
Resuelvo problemas de proporcionalidad aplicando el factor inverso y divisiones de fracciones.	
Aplico correctamente la ley de los signos de la multiplicación y la división al resolver operaciones que involucran números positivos y negativos.	
Utilizo correctamente la jerarquía de operaciones al operar con números positivos y negativos, enteros, decimales y fracciones.	
Represento la regla de sucesiones arimética de diferentes formas utilizando expresiones algebraicas equivalentes.	
Calculo la medida de los ángulos interiores, exteriores y centrales de polígonos regulares y determino con cuáles es posible construir un teselado.	
Construyo polígonos regulares a partir de la medida de sus ángulos centrales, interiores y exteriores y mediante al medida de sus lados.	
Construyo, interpreto y comparo información presentada en histogramas, polígonos de frecuencias y en gráficas de línea.	

Describe lo que consideras que tienes que hacer para mejorar tu desempeño en el siguiente bloque.

Bloque 2

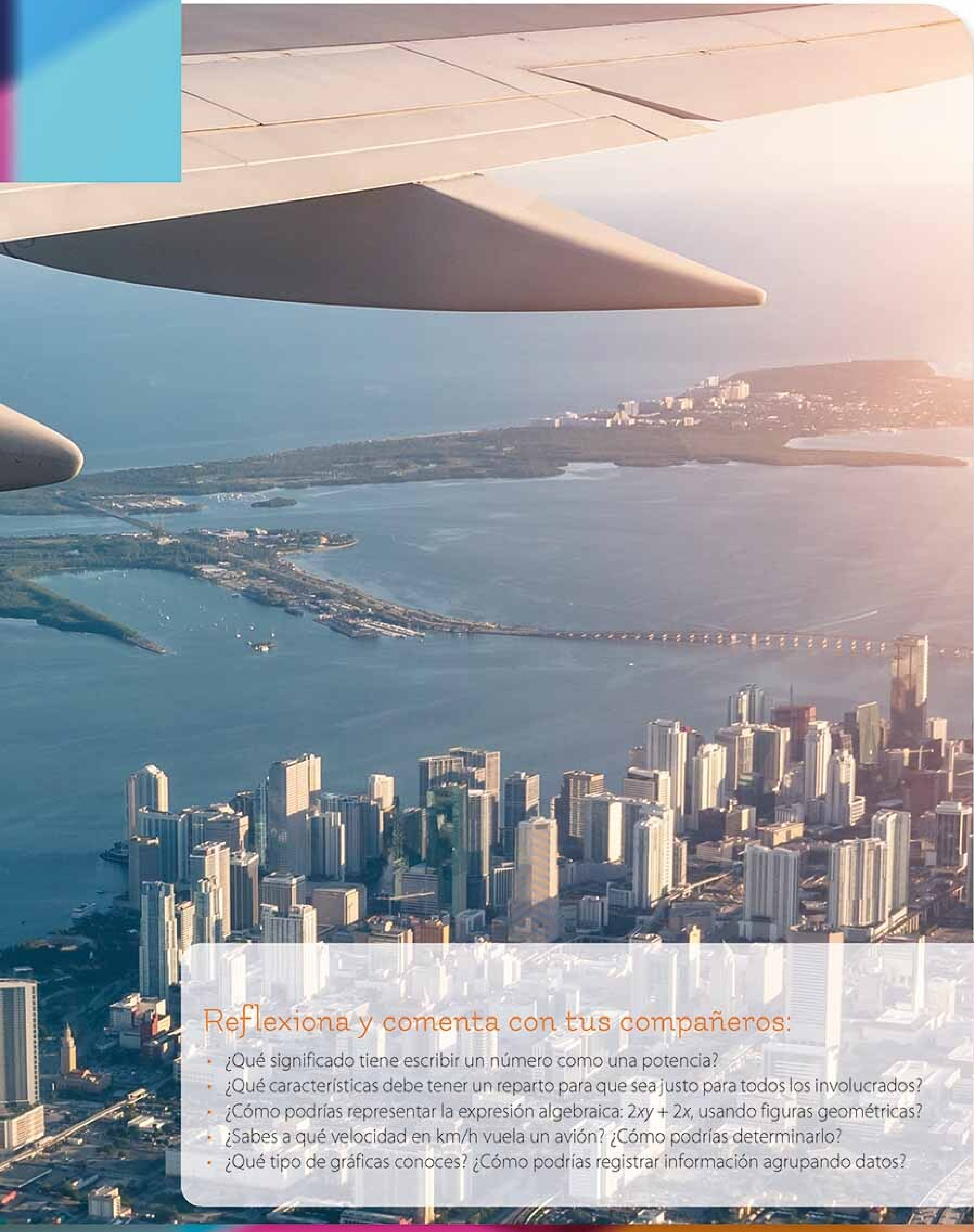
Secuencias:

6. Potencias y raíz cuadrada
7. Proporcionalidad y repartos
8. Uso de modelos geométricos
9. Sistemas de medidas
10. Medidas de tendencia central y de dispersión

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproximo raíces cuadradas.
- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
- Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
- Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
- Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

¿Alguna ves te habrás preguntado a qué altura vuela un avión comercial? En promedio un avión comercial vuela a 35 mil pies de altitud, que es equivalente a 10 mil metros, y vuela a una velocidad de entre 500 y 560 millas por hora. Vuelan a esa altura buscando condiciones óptimas para evitar la mayor cantidad de fenómenos meteorológicos, lo que contribuye, aparte de darle mayor seguridad, a que el consumo de combustible sea menor.



Reflexiona y comenta con tus compañeros:

- ¿Qué significado tiene escribir un número como una potencia?
- ¿Qué características debe tener un reparto para que sea justo para todos los involucrados?
- ¿Cómo podrías representar la expresión algebraica: $2xy + 2x$, usando figuras geométricas?
- ¿Sabes a qué velocidad en km/h vuela un avión? ¿Cómo podrías determinarlo?
- ¿Qué tipo de gráficas conoces? ¿Cómo podrías registrar información agrupando datos?

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproximo raíces cuadradas.

Potencias y raíz cuadrada

individual

Exploramos

1. Lee y resuelve los problemas.

a) Carlos tiene un terreno cuadrado que mide 8 m por lado. ¿Cuál es el área del terreno? ¿Qué operación permite obtenerla? __________

____

b) Pablo quiere cercar el contorno de un terreno cuadrado cuya área mide 144 m^2. ¿Cuál es el perímetro del terreno? ¿Cómo lo supiste? __________

____

2. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $2 + 2 + 2 + 2 =$ __________

b) $4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$ __________

c) $9 + 9 + 9 =$ __________

d) $2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ __________

e) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 =$ __________

f) $9 \times 9 \times 9 =$ __________

g) ¿Qué similitudes y diferencias observan en las operaciones? __________

3. Completa las multiplicaciones que representan el número de habitantes de los tres países más poblados del mundo en 2015, según datos del Inegi. Las cantidades son aproximaciones.

a) China: 1 376 000 000 hab: $1.376 \times$ __________

b) India: 1 311 000 000 hab: $1.311 \times$ __________

c) Estados Unidos 321 000 000 hab: $3.21 \times$ __________

4. Realiza las siguientes conversiones entre unidades de medida de longitud.

Considera que 1 nanómetro (nm) = 0.001 micrómetros (µm) = 0.000001 mm

a) 4 nm = __________ µm

b) 2 nm = __________ cm

c) 25 nm = __________ mm

d) 0.8 µm = __________ m

5. Compara tus respuestas con las de un compañero. Para los ejercicios 2 a 4, comenten si habrá una estrategia de escribir las mismas cantidades de manera simplificada. Registren sus acuerdos en su cuaderno. __________

____

____

Números al cuadrado y raíz cuadrada

Propósito Determinarás la relación entre un número elevado al cuadrado y su raíz cuadrada y aproximarás raíces cuadradas mediante diferentes procedimientos.

◂ Transitamos

pareja

1. En parejas, escriban el área de los siguientes cuadrados de dos maneras.

a) ________ = ____ b) ________ = ____ c) ________ = ____

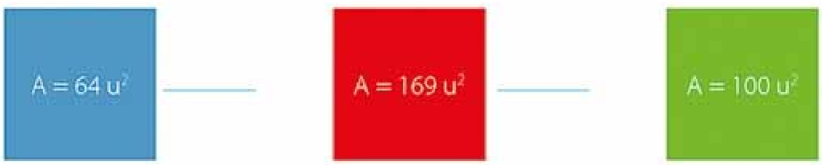
d) Si un cuadrado tiene un área de r^2, ¿cuál es la medida de sus lados? ______

2. Consideren que $m = 15$; $l = 11$ y $s = 16$ y escriban el área de los cuadrados anteriores, usando dos expresiones.

a) A = ________ b) A = ________ c) A = ________

d) Si r^2 es igual a 25 u^2, ¿cuánto vale r? Explica tu respuesta. ______

3. Anoten la medida de los lados de los siguientes cuadrados.



4. Respondan con base en las actividades anteriores.

a) ¿Qué hicieron para determinar la medida de los lados de los cuadrados? ______

b) Qué relación hay entre los valores que representan el área de los cuadrados y la medida de sus lados? ______

c) ¿Como puedes determinar los lados de un cuadrado cuando conoces la medida de su área? ______

d) Si el área de un cuadrado es de 20 u², ¿la medida de sus lados será un número entero? ¿Por qué? ______

e) ¿Cuál es la medida de los lados del cuadrado? ______

equipo

5. Comparen sus respuestas con otros compañeros. ¿Obtuvieron una medida exacta en la última pregunta? Comenten en grupo cómo pueden obtener las medidas de un cuadrado cuyos lados no son una medida entera o exacta, como en el caso anterior. Registren sus conclusiones en el cuaderno.

pareja

Para formalizar

6. Realicen en pareja una lectura comentada de la siguiente información

Multiplicar un número por sí mismo, por ejemplo, 3×3, es lo mismo que elevarlo al cuadrado o a la **segunda potencia**, es decir, 3^2. El número "pequeño", llamado **exponente**, indica que el tres, llamado base, se multiplica "dos" veces por sí mismo.

base → 3^2 ← exponente

La raíz cuadrada de un número es igual a un número que multiplicado por sí mismo o elevado al cuadrado sea igual al primer número. Su símbolo es $\sqrt{\ }$. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 1 es igual a 1, porque $1 \times 1 = 1$. Al número al que se le extrae la raíz cuadrada se le conoce como **radicando**.

La raíz cuadrada se representa de la siguiente manera: $\sqrt{1} = 1$; y $\sqrt{4} = 2$.

A los cuadrados cuyos lados representan un número entero, es decir, aquellos números que tienen una raíz cuadrada exacta se les conoce como **cuadrados perfectos**. Todos los cuadrados perfectos tienen una raíz cuadrada exacta.

En los números que no son cuadrados perfectos, su raíz representa una aproximación. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 es aproximadamente 1.4: $\sqrt{2} \approx 1.4$, porque: $1.4^2 = 1.4 \times 1.4 = 1.96$.

pareja

7. Completa la lista de los primeros 10 números que son cuadrados perfectos y escribe la raíz cuadrada de cada uno. Después, responde.

Cuadrado perfecto	1									
Raíz cuadrada	1									

a) ¿Cuál es el resultado de $(-6)^2$?¿Qué otro número elevado al cuadrado permite obtener el resultado anterior? ______

b) ¿Qué otro número multiplicado por sí mismo es igual a 100? ______

c) ¿Es correcto afirmar que: $\sqrt{a^2} = \pm a$? Justifiquen su respuesta ______

d) ¿Todo radicando puede tener dos raíces? Escriban un ejemplo que argumente su postura. ______

e) Si $+\sqrt{4} = 2$, ¿qué significado tienen las expresiones $-\sqrt{4}$ y $\pm\sqrt{4}$? ______

f) Si se sabe que $4^2 = 16$, como puedes determinar $\sqrt{16}$? ______

g) ¿Qué relación hay entre elevar un número al cuadrado y la raíz cuadrada? ______

Glosario

El símbolo ± (más-menos) se utiliza para indicar que un número o una literal adquiere dos valores, uno positivo y uno negativo..

equipos

8. Discutan las preguntas anteriores en grupo y con el apoyo del profesor concluyan sobre el número de raíces de un número y el signo de cada una y la relación entre elevar un número al cuadrado y la raíz cuadrada. Registren sus acuerdos en el cuaderno.

equipo

En los números que no son cuadrados perfectos, su raíz representa una aproximación.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 es aproximadamente 1.4: 2 ≈ 1.4, porque: $1.4^2 = 1.4 \times 1.4 = 1.96$.

9. En equipo, anoten el número de cuadrados que se agregan, en cada caso, para formar el siguiente cuadrado perfecto.

10. Ahora, apóyense en las figuras anteriores para encontrar una aproximación a la raíz cuadrada de 6.

a) Ubiquen entre qué cuadrados perfectos está el 6. ____________________

b) De los cuadrados anteriores, ¿cuántos cuadrados se agregan al menor para formar el mayor? ____________________

c) De los cuadrados que se agregan, ¿qué fracción, como número decimal, representan los que completan 6 cuadrados? ____________________

d) Sumen el número anterior al número entero más cercano a la raíz de seis. ¿Qué número obtuvieron? ____________________

e) Con la calculadora obtengan la raíz cuadrada de 6 o multipliquen el resultado anterior por sí mismo. ¿Qué observan? ____________________

Consulta en...

Si quieres practicar más sobre aproximaciones a raíces cuadradas ingresa a: https://bit.ly/2MfpEgD y resuelve los ejercicios.

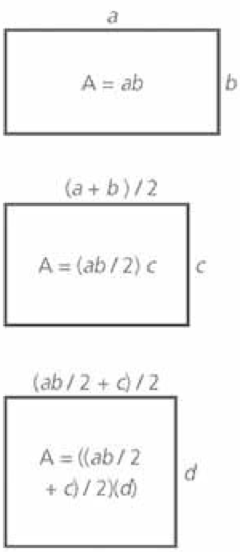
11. Completen la tabla a partir del procedimiento anterior. Observen el ejemplo.

Raíz cuadrada de...	Raíz del cuadrado perfecto más cercano	Cuadrados que se agregan para formar el siguiente cuadrado	Fracción de los cuadrados que se agregan (número decimal)	Raíz aproximada
14	3	7	$\frac{5}{7} = 0.714...$	3 + 0.714 = 3.714
20	4			
26				
31				
38				
50				

12. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Utilicen la calculadora para validarlos. ¿Qué tan cercanos fueron sus resultados? Discutan otras formas de encontrar aproximaciones a raíces cuadradas que puedan resultar más precisas.

Otra vista

Los babilonios tenían un procedimiento para calcular la raíz cuadrada, transformando un rectángulo en cuadrado: dibujan un rectángulo cuya área sea el número al que se le busca raíz y luego aproximaban la base y la altura del rectángulo hasta formar o aproximar a un cuadrado. Donde *a* y *b* son números enteros:



$d = (ab/2 + c)/2$

http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsm01g01v02/u02t03s02.html

individual

13. Completa las siguientes expresiones con parejas de números enteros, sin usar calculadora.

a) ____ $< \sqrt{78} <$ ____ b) ____ $< \sqrt{65} <$ ____ c) ____ $< \sqrt{83} <$ ____

14. Completa las siguientes expresiones aproximando a una cifra decimal.

a) ____ $< \sqrt{78} <$ ____ b) ____ $< \sqrt{65} <$ ____ c) ____ $< \sqrt{83} <$ ____

15. Escriban una aproximación a la raíz cuadrada de los números anteriores con dos cifras decimales.

a) $\sqrt{78} \approx$ ____ b) $\sqrt{65} \approx$ ____ c) $\sqrt{83} \approx$ ____

equipos

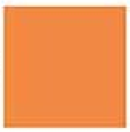
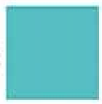
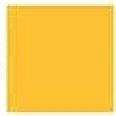
16. Reunidos en equipos, comenten el procedimiento anterior para aproximar a raíces cuadradas y descríbanlo enseguida.

____

17. Lean la siguiente información y resuelvan.

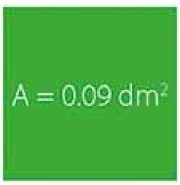
La maestra pidió a sus alumnos que recortaran cuadrados y que calcularan su área, usando como unidades de medida decímetros.

a) Calculen el área de los cuadrados que recortaron algunos alumnos.

1.3 dm  0.6 dm  0.9 dm 

A = ____ A = ____ A = ____

b) Calculen la medida de los lados de los siguientes cuadrados.



Lado = ____ Lado = ____ Lado = ____

c) ¿En qué casos un número a^2 es menor que a? ____

____

d) ¿En qué casos la raíz positiva de un número es mayor que el radicando? ____

____

Ponlo en práctica

18. Resuelve.

a) ¿Cuál es el área de un terreno cuadrado que mide 3.8 m por lado?

____

b) Karla hizo y decoró una tarjeta cuadrada de 150 cm^2 de área. Si decoró el contorno con listón de color, ¿cuánto listón utilizó?

____

c) ¿Qué números representan las raíces cuadradas de 729?

____

19. Identifica los números que representan cuadrados perfectos y calcula su raíz cuadrada.

a) $\sqrt{441} =$ ______ b) $\sqrt{224} =$ ______ c) $\sqrt{256} =$ ______ d) $\sqrt{900} =$ ______

20. Calcula las raíces que se piden en cada caso.

a) $\pm\sqrt{114} =$ ______ b) $-\sqrt{400} =$ ______ c) $\sqrt{961} =$ ______ d) $\pm\sqrt{196} =$ ______

21. Aproxima a dos cifras decimales la raíz cuadrada de los siguientes números.

a) $\sqrt{19} \approx$ ______ b) $\sqrt{99} \approx$ ______ c) $\sqrt{221} \approx$ ______ d) $\sqrt{150} \approx$ ______

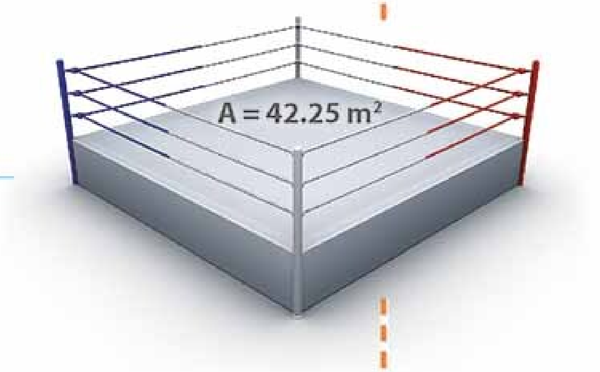
22. Resuelve.

a) Un jardín con forma cuadrada se va a cubrir con cuadrados de pasto de 40 cm por lado. Si el terreno tiene una superficie de 35 m^2, ¿cuántas piezas de pasto se necesitan para cubrir el terreno?

____

b) Si el ring de box que se muestra ocupa una superficie de 42.25 m^2, ¿cuál es la longitud de todas las cuerdas que lo delimitan?

____



23. Las siguientes medidas representan el área de diferentes cuadrados. ¿En cuáles sus lados son mayores a su área? Rodéalos.

a) 1.21 m^2 b) 0.81 m^2 c) 2.5 m^2

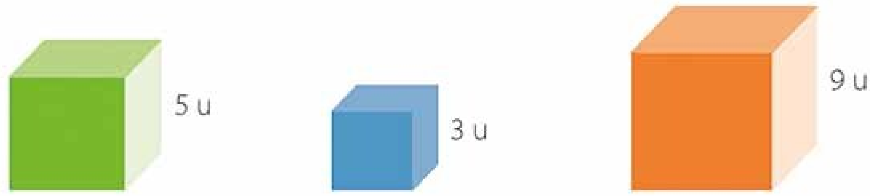
d) 0.98 m^2 e) 1.05 m^2

Producto de potencias y potencias de potencias

Propósito Determinarás y aplicarás procedimientos para calcular potencias con exponente positivo, el producto de potencias y potencias de potencias.

parejas

1. Representen el volumen de los siguientes cubos con una multiplicación y resuelvan.



V = ______________ V = ______________ V = ______________

a) El área de un cuadrado se representa como un número a la segunda potencia (l^2). ¿Cómo se representa el volumen de un cubo como potencia? ¿Cuál sería su exponente? ______________

b) Escriban el volumen de los cubos anteriores como una potencia.

c) En la actividad inicial resolvieron multiplicaciones como: $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$. ¿Cómo representarían esta multiplicación como una potencia? ¿Cuál es su exponente? ¿Por qué? ______________

d) Si en una juguetería empacan cubos de colores en bolsas con 5 piezas, que guardan en paquetes con 5 bolsas, y con éstas llenan 5 cajas, que guardan en 5 contenedores, ¿cuántos cubos hay en los contenedores? Expresen el resultado como una potencia. ______________

2. Escriban como una potencia las siguientes multiplicaciones de factores iguales y resuelvan.

a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ ______________

b) $8 \times 8 \times 8 \times 8 =$ ______________

c) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ ______________

d) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ ______________

3. Escriban como una multiplicación las siguientes potencias y resuelvan.

a) $11^4 =$ ______________

b) $4^8 =$ ______________

4. Completen la siguiente tabla. Analicen la regularidad y respondan.

Multiplicación	Número	Potencia
$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$	7776	6^5
$6 \times 6 \times 6 \times 6$		
$6 \times 6 \times 6$		
6×6		
6		

a) Describan la regularidad de cada columna: ________________

b) En la sucesión que se genera en la columna número, ¿cómo se obtiene cada número a partir del anterior? ________________

c) De acuerdo con la regularidad, ¿qué número seguiría en la columna número?

____

d) ¿Qué potencia continúa en la columna correspondiente? ________________

e) ¿Cómo puedes representar el número 1 como una potencia de base 6? ________

5. Completen las siguientes sucesiones numéricas y de potencias, a partir de las regularidades anteriores.

a) $4\,096 = 4^6$, $1\,024 = 4^5$, $256 = 4^4$, ______, ______, ______, ______,...

b) $100\,000 = 10^5$, $10\,000 = 10^4$, $1\,000 = 10^3$, ______, ______, ______,...

6. Reúnanse con otros compañeros y discutan sus respuestas. Pueden usar una calculadora para verificarlas. Discutan qué significado tiene elevar una potencia con exponente 1 y cero. Registren sus conclusiones.

Para formalizar

equipo

7. Lee la siguiente información. Si tienes dudas, busca el apoyo de tu profesor para aclararlas.

Una **potencia** es una forma abreviada de representar una multiplicación iterada del mismo factor. En la potencia b^a, b representa la base y a el exponente.

En una potencia, el exponente indica las veces que se multiplica la base por sí misma. En el siguiente caso: b^5, el exponente indica que b se multiplica cinco veces por sí misma: $b \times b \times b \times b \times b$.

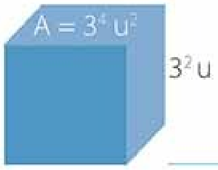
Todo número expresado como potencia con exponente 1 es igual a la base, es decir, b^1 es igual a b.

En el caso de potencias con exponente cero, el resultado siempre es uno. Por ejemplo, $b^0 = 1$. Más adelante analizaremos cómo surge dicha resolución.

equipos

8. Analicen las medidas del área de la base y de la altura de los siguientes prismas, que fueron representadas como potencias y resuelvan.

Prisma 1



____

Prisma 2

____

a) Escriban la operación que permite obtener el volumen de cada prisma como una multiplicación de multiplicaciones del mismo factor y resuélvanla:

- Prisma 1: $3^4 \times 3^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times$ ___________
- Primas 2: $4^5 \times 4^2 =$ ___________

b) Anoten, junto a cada prisma, su volumen como una sola potencia de la base correspondiente.

c) ¿Qué relación hay entre los exponentes anteriores y los exponentes de la multiplicación inicial de cada caso? ___________

____

9. Resuelvan las siguientes multiplicaciones a partir de sus conjeturas. Escriban el resultado como una sola potencia de la respectiva base.

a) $2^5 \times 2^4 =$ ___________

b) $7^4 \times 7^1 =$ ___________

c) $5^4 \times 5^3 =$ ___________

d) ¿Qué procedimiento, simplificado, permite obtener el resultado de una multiplicación de potencias de la misma base? ___________

____

e) ¿Cuál es el resultado de $(a^n)(a^m)$? ___________

10. Escriban las siguientes potencias como el producto de dos potencias de la misma base.

a) $8^9 =$ ___________ b) $12^{10} =$ ___________ c) $7^8 =$ ___________

equipo

11. Validen sus conjeturas y resultados con los de otros compañeros. Si existen diferencias, busquen la manera de demostrar su postura y lleguen a concensos en grupo.

equipo

12. Observen las medidas de cada arista en el siguiente cubo y resuelvan.

3^2

a) ¿Qué multiplicación de potencias permite obtener el volumen del cubo?

____

b) ¿Cuál es el volumen del cubo como una sola potencia? Argumenten su respuesta. ____________________

c) Marcelo dice: el volumen del cubo se puede representar como una potencia de una potencia, es decir, $(3^2)^3$. ¿Por qué la expresión de Marcelo es correcta?

____

d) Representen la expresión anterior como multiplicaciones iteradas del mismo factor y como una sola potencia. ____________________

e) ¿Qué relación hay entre los exponentes de la expresión de Marcelo y el exponente que obtuvieron al expresar el volumen como una sola potencia? ______

____

13. Analicen la información de la tabla y completen los espacios correspondientes.

Multiplicaciones de la base	Multiplicación de potencias	Potencia de una potencia	Una sola potencia
$(4 \times 4)(4 \times 4)(4 \times 4)(4 \times 4)$			
	$6^3 \times 6^3 \times 6^3$		
		$(10^1)^6$	
	$5^5 \times 5^5$		

a) ¿Qué procedimiento permite obtener el exponente al simplificar una potencia de una potencia? ____________________

b) ¿Cuál es el resultado de $(a^n)^m$? ____________________

grupo

14. En grupo, y con el apoyo del profesor, comenten los procedmientos para obtener la potencia de una potencia. Discutan sus estrategias y resultados en busca de llegar a un acuerdo en grupo.

Para formalizar

parejas

15. Realicen una lectura comentada de la siguiente información. Después, revisen sus conjeturas en las actividades previas, para validarlas o corregirlas, si fuera necesario.

> Al multiplicar dos potencias de la misma base, el resultado se puede escribir como una potencia de la misma base con exponente igual a la suma de los exponentes de los factores. Por ejemplo:
>
> $2^2 \times 2^2 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) = 4 \times 4 = 16 = 2^{2+2} = 2^4$
>
> De forma general se representa como: $a^n \times a^m = a^{n+m}$
>
> Cuando se tiene una potencia de una potencia, se escribe como una potencia considerando la misma base y el producto de los exponentes. Por ejemplo:
>
> $(2^3)^3 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2)\ (2 \times 2 \times 2)\ (2 \times 2 \times 2) = 2^{(3)(3)} = 2^9$
>
> Es decir: $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Ponlo en práctica

individual

16. Escribe cada número como una multiplicación del mismo factor y como potencia.

a) $64 = 2\times$ ____________________

b) $4\,096 = 8\times$ ____________________

c) $15\,625 = 5\times$ ____________________

Consulta en...

Si quieres practicar los temas trabajados en la lección, ingresa a:

Producto de potencias: https://goo.gl/bZQokQ

Potencias de potencias: https://goo.gl/VSWgzZ

17. Escribe, dentro de cada figura, su área como una potencia.

18. Resuelve las multiplicaciones de potencias.

a) $16^4 \times 16^7 =$ ________ b) $11^5 \times 11^{10} =$ ________ c) $33^3 \times 33^3 =$ ________

d) $14^1 \times 14^8 =$ ________ e) $a^5 \times a^8 =$ ________ f) $n^m \times n^s =$ ________

19. Escribe el exponente que falta en cada expresión o escribe la potencia que resulta.

a) (8^2) ___ $= 8^8$ b) (9^7) ___ $= 9^{21}$ c) (15^5) ___ $= 15^{30}$

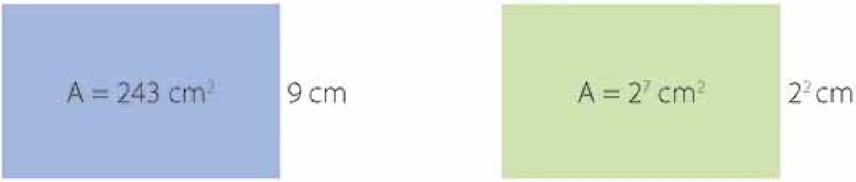
d) $(p^t)^r =$ ________ e) $(13^4)^3 =$ ________ f) $(2^{17})^0 =$ ________

Cociente de potencias y potencias con exponente negativo

Propósito Calcularás el cociente de potencias y representarás potencias como exponente negativo.

parejas

1. Calculen la medida de la base de las siguientes figuras. En la segunda figura, escriban el resultado como una potencia. Realicen las operaciones necesarias para verificar su respuesta.



______ ______

a) ¿Qué operación hicieron en la primera figura para obtener la medida de la base?
______

b) ¿Qué división de potencias permite obtener la base de la segunda figura? ¿Cuál es el resultado? ______

c) ¿Qué potencia multiplicada por 2^2 es igual a 2^7? ¿Coincide con la medida que obtuvieron en la figura? ______

2. Utilicen la relación entre la multiplicación y la división para encontrar las potencias que completan cada pareja de operaciones.

a) $4^8 \times$ ______ $= 4^{13}$ $4^{13} \div$ ______ $= 4^8$

b) $9^4 \times$ ______ $= 4^6$ $9^6 \div$ ______ $= 9^4$

c) $12^7 \times$ ______ $= 12^8$ $12^8 \div$ ______ $= 12^7$

Como saben, la multiplicación y la división se consideran operaciones inversas.

d) De acuerdo con esto, ¿qué relación hay entre los exponentes de una multiplicación y los de una división, de potencias de la misma base? ______
______

e) Si el área de un rectángulo mide 5^5 cm^2 y su base mide 5^3 cm, ¿cuánto mide su altura? ______

3. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Registren una regla general para simplificar cocientes de potencias de la misma base. Compartan sus conclusiones con el grupo y con el profesor.

equipo

4. Resuelvan las siguientes divisiones de potencias. Operen con número naturales. Al final, escriban el resultado como una potencia.

a) $\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{729}{} =$ ______

b) $\frac{6^4}{6^3} =$ ______

c) $\frac{2^8}{2^2} =$ ______

d) ¿Cuál es el resultado de la división $a^m \div a^n$? ______

5. Resuelvan las divisiones operando con los exponentes.

a) $\frac{7^8}{7^5} = 7^{8-5} =$ ______

b) $\frac{9^7}{9^1} =$ ______

c) $\frac{5^3}{5^6} =$ ______

d) $\frac{8^5}{8^{10}} =$ ______

e) ¿Qué sucede cuando el dividendo es menor que el divisor? ______

______

6. Escribe los valores que faltan para que cada igualdad sea verdadera.

a) $\frac{15^8}{15^{\square}} = 15^{8\square} = 15^0$

b) $\frac{14^{\square}}{14^{10}} =$ ______ $= 14^0$

c) ¿Cuál es el resultado de dividir un número entre sí mismo? De acuerdo con lo anterior, justifiquen por qué una potencia con exponente cero es igual a 1.

______

Consulta en...

Utiliza una calculadora científica para validar tus resultados. La tecla $x^{\square}$ permite representra los exponentes. Por ejemplo, para 8^5, tecleen: 8, $x^{\square}$, 5 y utiliza las teclas de operación habituales..

7. Resuelvan las divisiones. Simplifiquen la fracción y escriban el resultado con denominador como una potencia de la misma base. Observen el ejemplo.

a) $\frac{3^4}{3^7} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{81}{2\,187} = \frac{1}{\_\_} =$ ______

b) $\frac{7^2}{7^4} =$ ______

c) $\frac{2^4}{2^8} =$ ______

d) ¿Es correcto afirmar que $\frac{2^3}{2^5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$? Hagan los cálculos necesarios para validar su postura.

______

grupo

8. En grupo y con el apoyo del profesor, registren sus acuerdos sobre cómo representar potencias con exponente negativo como una fracción unitaria cuyo denominador sea una potencia con exponente positivo es decir, m^{-2} y $\frac{1}{m^2}$ y la relación entre ambas potencias.

parejas

9. Realicen una lectura comentada de la siguiente información. Validen sus resultados previos.

◂ Para formalizar

Al dividir potencias de la misma base, el exponente es igual al exponente del dividendo menos el exponente del divisor.

Por ejemplo: $\frac{2^5}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = \frac{2\times2}{1} = \frac{4}{1} = 2^{5-3} = 2^2$

De forma general se representa como: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Una potencia con exponente negativo se puede representar como una fracción con numerador 1 y denominador como potencia con exponente positivo:

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{2^2} = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

Es decir, $n^{-m} = \frac{1}{n^m}$

Ponlo ◂ en práctica

individual

10. Analiza la regularidad y escribe los términos que continúan la sucesión numérica y la respectiva sucesión de potencias de base 3.

a) Sucesión numérica: 729, 243, ______, ______, ______, ______, ______,

______, ______, ______, ______, ...

b) Sucesión de potencias: , ______, ______, ______, ______, ______,

______, ______, ______, ______, ______, ______, ...

Consulta en...

Ingresa a: https://www.thatquiz.org/es-2/matematicas/potencia/ elige la opción "potencias" y "$n^a \div n^b = n^x$" practicar divisiones de potencias.

11. Resuelve las siguientes divisiones.

a) $\frac{5^8}{5^3}$ = ______ c) $\frac{6^8}{6^{10}}$ = ______

b) $\frac{9^{11}}{9^5}$ = ______ d) $\frac{12^6}{12^1}$ = ______

12. Representa con potencias de la misma base las siguientes divisiones.

a) 25 ÷ 625 = ______

b) 64 ÷ 4 = ______

c) 27 ÷ 729 = ______

13. Si en una caja hay 4^5 paquetes con paletas y en cada paquete hay 4^2 paletas, ¿cuántos paquetes hay en la caja? ______

______

Notación científica

Propósito Representarás cantidades muy grandes o muy pequeñas por medio de la notación científica.

parejas

1. Resuelvan las siguientes multiplicaciones de números decimales por potencias de base 10.

a) $2.6 \times 10^3 = 2.6 \times 1\,000 =$ ______________

b) $1.25 \times 10^5 =$ ______________

c) $3.01 \times 10^4 =$ ______________

2. Los siguientes números representan el resultado de multiplicar un número menor que 10 y mayor que 1 por una potencia de base 10. Escriban la multiplicación que corresponde a cada caso.

a) $45\,000\,000 = 4.5 \times$ ______________ $= 4.5 \times 10$___

b) $809\,000 =$ ______________

c) $710\,000\,000 =$ ______________

d) ¿Qué estrategia siguieron para determinar la potencia de 10 correspondiente?

____

3. Resuelvan las siguientes multiplicaciones por fracciones.

a) $6.5 \times \frac{1}{10\,000} =$ ______________

b) $1.8 \times \frac{1}{1\,000} =$ ______________

c) $9.3 \times \frac{1}{100\,000} =$ ______________

d) $2.7 \times \frac{1}{10\,000} =$ ______________

4. Representen las multiplicaciones anteriores como una multiplicación por una potencia de 10, con exponente positivo y con exponente negativo.

a) $6.5 \times \frac{}{\_\_\_\_} = 6.5 \times$ ______

b) $1.8 \times \frac{}{\_\_\_\_} = 1.8 \times$ ______

c) $9.3 \times \frac{}{\_\_\_\_} = 9.3 \times$ ______

d) $2.7 \times \frac{}{\_\_\_\_} = 2.7 \times$ ______

e) Describan el procedimiento para multiplicar un número por una potencia de 10 con exponente negativo.

____

equipo

5. Reúnanse con otros compañeros y comenten sobre cómo las operaciones por potencias de 10, con exponente positivo y negativo, permiten representar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

parejas

6. Lean la información y resuelvan las actividades.

Un año luz es una unidad de medida de distancia y es usada en astronomía. Se refiere a la distancia que la luz recorre a lo largo de un año. Es aproximadamente igual a 9 460 000 000 000 km.

a) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones representa un año luz en kilómetros? Argumenten su elección. ______

9.46×10^{12} km 9.46×10^{10} km 9.46×10^{13} km

b) La distancia que hay entre la Luna y la Tierra equivale a 0.000000041 años luz. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la distancia anterior?

4.1×10^{-10} años luz 4.1×10^{-6} años luz 4.1×10^{-8} años luz

¿Qué relación hay entre el número decimal que representa la distancia y el exponente de la multiplicación? ______

7. La siguiente tabla muestra el volumen de los planetas del Sistema Solar. Escriban los valores que faltan. En la última columna escriban una multiplicación de un número igual o mayor que 1 y menor que 10 por una potencia de base 10.

Planeta	Volumen (km^3)	Con una multiplicación (km^3)
Mercurio	608 300 000 000	6.083×10^{11}
Venus	928 000 000 000	
Tierra		1.083×10^{12}
Marte	163 180 000 000	
Júpiter		1.431×10^{15}
Saturno		8.27×10^{14}
Urano	68 340 000 000 000	
Neptuno		6.25×10^{13}

8. Un el radio de un átomo es la unidad más pequeña en que se puede dividir la materia sin perder sus propiedades.

a) Si el radio de un átomo de hidrógeno mide 1×10^{-10} m, ¿cuál es su tamaño como número decimal? ______

b) Si el radio de otro tipo de átomo mide 0.0000000053 m, ¿por qué potencia de base 10 se multiplica 5.3 para obtener dicha medida? Escriban la operación correspondiente: ______

9. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten las ventajas de representar cantidades muy grandes o muy pequeñas mediante multiplicaciones por potencias de 10, con exponente positivo y negativo.

parejas

10. Lean el parejas la siguiente información. Después, realicen lo que se pide.

Para formalizar

La **notación científica** es una forma abreviada de representar cantidades muy grandes o muy pequeñas, representadas como una multiplicación de un número entre 1 y 10 por una potencia de base 10. Por ejemplo:

$12\,300\,000 = 1.23 \times 10^{7}$ $0.0000015 = 1.5 \times 10^{-6}$

a) Analicen los siguientes casos y describan el procedimiento que permite pasar de un número en notación científica a su representación numérica. ______

$2.5 \times 10^{11} = 250\,000\,000\,000$ $4.12 \times 10^{-9} = 0.00000000412$

b) ¿Por qué la siguiente representación no es correcta: $3.4 \times 10^{6} = 34\,000\,000$? ______

______

c) Describan cómo pasar de un número a notación científica a partir de los siguientes ejemplos. ______

$34\,000\,000\,000 = 3.4 \times 10^{10}$ $0.00000003125 = 3.125 \times 10^{-8}$

d) Expliquen cuál es el error en la siguiente representación: $0.00000589 = 5.89 \times 10^{-8}$: ______

Consulta en...

Ingresa a: https://es.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals/pre-algebra-scientific-notation/v/scientific-notation y observa el video que se ofrece sobre cómo representar cantidades en notación científica.

11. Comparen sus respuestas con otros compañeros. Si tienen dudas, busquen el apoyo de su maestro para aclararlas.

Ponlo en práctica

individual

12. Representa las siguientes cantidades en notación científica.

a) 765 000 000 000 000 = ______

b) 1 894 000 000 = ______

c) 0.00000000943 = ______

d) 0.000000000000000012 = ______

13. Un átomo está formado por electrones, protones y neutrones. Escribe la masa de cada elemento como número decimal. Después, responde.

a) Masa de un protón: 1.672×10^{-21} mg = ______

b) Masa de un neutrón: 1.675×10^{-24} g = ______

c) Masa de un electrón: 9.019×10^{-25} mg = ______

d) Si la población de China en 2015 era de 1 376 000 000 habitantes, ¿cómo se representa en notación científica? ______

e) Si un año luz es igual a 5.8786×10^{12} millas, ¿cuál es su representación como número natural? ______

individual

1. Rodea los números que representan un cuadrado perfecto.

◂ Integramos

a) 196　　b) 416　　c) 625

d) 256　　e) 512　　f) 729

2. Aproxima la raíz cuadrada de los siguientes números a dos cifras decimales.

a) $\sqrt{95} \approx$ ________　　b) $\sqrt{138} \approx$ ________　　b) $\sqrt{73} \approx$ ________

3. Si el área de un cuadrado mide 236 cm^2, ¿cuánto mide su perímetro? ________

____

4. En una bodega hay 6 contenedores con 6 cajas cada uno y en cada caja hay 6 paquetes de pelotas de tenis.

Si cada paquete de pelotas de tenis contiene 6 cajas y en cada caja hay 6 bolsas con 6 pelotas, en cada una, ¿cuántas pelotas hay en la bodega? ________

____

5. Calcula el producto de las siguientes multiplicaciones como potencia.

a) $(8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8)\ (8 \times 8 \times 8 \times 8) =$ ________________

b) $(5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)\ (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) =$ ________________

6. Resuelve las siguientes operaciones de potencias. Recuerda la ley de los signos para la multiplicación y la división.

a) ¿Cuál es el resultado de potencia de potencia $(9^{-3})^{-5}$? Justifica tu respuesta. ________

____

b) ¿Cuál es el resultado de $(6^{-7})^{3}$? ________________

c) ¿Cuál es el resultado de la división $\frac{9^{7}}{9^{-5}}$? ________________

7. En una caja hay 3^8 bolsas de paletas. Si cada bolsa contiene 3^3 paletas, ¿cuántas paletas hay en total? ________________

____

8. Realiza las siguientes equivalencias en notación científica.

a) Longitud de una bacteria: 2.1×10^{-7} mm = ________________ mm

b) Distancia de la Tierra al Sol: 1.466×10^{8} km = ________________ km

Aprendizaje esperado:
Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Proporcionalidad y repartos

La caminadora aquí

Exploramos ▸

individual

1. La imagen muestra la pantalla de la caminadora en la que Liliana recorrió 6 km a una velocidad constante. Completa la siguiente tabla a partir de la información.

Tiempo (min)	1	5	10	12	22	30
Distancia (km)		1				

a) ¿Qué tipo de relación representa la situación? ___

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Cómo se puede calcular dicha constante? ___

2. Las imágenes muestran parte de las pantalla de otras caminadoras. Considera la información de cada una, que la distancia es constante y calcula la velocidad correspondiente de acuerdo con el tiempo que se muestra en cada caso.

Velocidad: ___ km/min   Velocidad: ___ km/min   Velocidad: ___ km/min

a) Considerando que la distancia fue la misma en los tres casos, ¿qué sucedió con el tiempo cuando la velocidad aumentó? ___

b) Si la velocidad disminuye, ¿qué sucede con el tiempo? ___

3. Para pintar las paredes de una casa Pedro mezcló tres colores de pintura: azul, blanca y gris. Para preparar una cubeta de 20 L, utilizó 10 L de pintura blanca, 8 L de pintura azul y 2 L de pintura gris.

a) ¿Qué porcentaje de la cubeta representa cada color de pintura? ___

b) Si necesita preparar otros 8 L de manera que el tono sea exactamente igual, ¿cuántos litros necesita de cada pintura? ___

c) ¿Qué tipo de relación hay entre los litros de cada color de pintura y el porcentaje que representa? ___

Proporcionalidad directa e inversa

Propósito Compararás diferentes tipos de relaciones (lineales y de proporcionalidad) y resolverás problemas de proporcionalidad inversa.

◂ Transitamos

pareja

1. Analicen la información y resuelvan los siguientes problemas.

Mariana compró 24 pulseras del mismo precio. Pagó, en total, $1 800 y obtuvo la promoción del envío gratis.

a) Completen la tabla que muestra el costo (y) en pesos de x número de pulseras.

Pulseras (x)	5	12	15	21
Costo ($) ($y$)				

b) ¿Qué expresión algebraica representa lo que Mariana pagó por x número de pulseras? ______

c) Cuando no hay promoción, la tienda cobra $85 por gastos de envío por pedido. Completa la siguiente tabla, que muestra el costo de x pulseras, incluyendo el costo de envío.

Pulseras (x)	8	14	18	24
Costo ($) ($y$)				

d) ¿Qué expresión algebraica representa el costo (y) en pesos de x número de pulseras, incluido el envío? ______

Mariana quiere regalar las pulseras, en partes iguales, entre sus sobrinas que asistirán a una reunión a su casa.

e) Completen la tabla que muestra el número de pulseras, que le correspondería a x número de sobrinas que asistan a la reunión.

Sobrinas (x)	2	3	4	8
Pulseras (y)				

f) ¿Qué hicieron para completar la tabla? ______

g) ¿Qué sucede si el número de sobrinas aumenta? ______

______

h) ¿Cómo representarían algebraicamente la situación? Justifiquen su respuesta.

______

equipo

2. Comparen sus resultados con los de otras parejas. Comenten la diferencia entre las tres situaciones. ¿Qué sucede en el último caso, hay algún valor que sea constante? ¿Cuál? ¿Qué tipo de proporcionalidad representa la situación? Registren sus acuerdos en su cuaderno.

3. Completen las siguientes tablas a partir de la información dada en cada caso.

a) En un negocio venden bolsas de café de diferentes medidas. Las bolsas de café de 250 g las venden en $87.

Bolsas de café de 250 g	3	7	9	12	15
Precio ($)					

b) En el negocio de café venden bolsas de 200 g, 250 g, 300 g y 500 g, las cuales llenan de costales de 15 kg (15 000 g). ¿Cuántas bolsas pueden llenar, en cada caso, con un costal?

Capacidad de las bolsas (g)	200	250	300	500	1 000
Bolsas que se llenan con 15 kg					

4. Respondan las preguntas a partir de la información de las tablas.

a) ¿Qué sucede con el costo del café al aumentar o disminuir el número de bolsas que se venden? ______________________________

____

b) ¿Qué tipo de variación representa la primera tabla? ______________

c) ¿Qué sucede con el número de bolsas de café que se pueden llenar al aumentar o disminuir la masa de cada una? ______________________________

____

d) La segunda tabla representa una relación de proporcionalidad inversa, ¿por qué recibe este nombre? ______________________________

e) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en la primera tabla? ¿Cómo se obtiene a partir de la tabla? ______________________________

f) Si en el segundo caso la constante es 15 kg (15 000 g), ¿cómo se obtiene a partir de la tabla? ______________________________

5. Escriban el tipo de proporcionalidad, *directa* o *inversa*, que representa cada tabla y anoten la constante. Consideren la información de la actividad anterior.

En una fábrica en la que producen piezas de metal para automóviles, tienen una máquina que produce 480 piezas de metal en un día, trabajando a cierto ritmo durante 8 horas de manera constante.

a) Si modifican el ritmo de trabajo de la máquina al número de piezas por hora que muestra la tabla, ¿cuántas piezas tiene que producir cada hora para obtener las 480 piezas?

Tipo de proporcionalidad: ______ Constante de proporcionalidad: ______

Horas de trabajo (x)	2	3	5	8	10	12
Piezas por hora (y)						

b) Si la máquina trabaja de manera constante, produciendo 40 piezas por hora, ¿en cuánto tiempo producirá las 480 piezas que tienen que entregar?

Tipo de proporcionalidad: ______ Constante de proporcionalidad: ______

Horas de trabajo (x)	2	3	5	8	10	
Piezas producidas (y)						

6. Analicen las tablas y respondan.

a) ¿Qué diferencia observan en el comportamiento de y al modificar los valores de x en ambos casos? ______

______

b) ¿Cómo se obtiene y a partir de x y la constante en cada caso? ______

______

c) Elijan cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponde a cada situación. Discutan y justifiquen su elección.

$y = \frac{40}{x}$ $\quad$ $y = \frac{480}{x}$ $\quad$ $y = 480x$ $\quad$ $y = 40x$

______

______

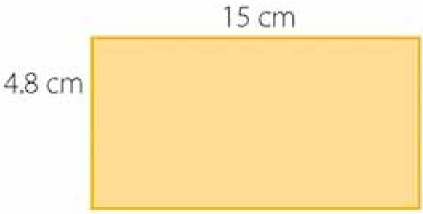
______

grupo

7. Reúnanse en grupo y discutan sus resultados. ¿Cuál es al diferencia entre la expresión de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa? Establezcan una expresión general en función de x, y y la constante (k). Validen su expresión con el apoyo de su profesor.

individual

8. Lee la información y resuelve el siguiente problema.



La maestra mostró el siguiente rectángulo a sus alumnos y les pidió construir otros diferentes, cuya área fuera la misma, pero con otras medidas.

a) ¿Cuál es el área del rectángulo? ______

b) Completa la siguiente tabla que muestre diferentes medidas para rectángulos que cumplan con la condición de la maestra.

Base (cm)				
Altura (cm)				
Área (cm²)				

c) ¿Cómo determinaron los valores de la base y la altura? ______

______

d) Elige una de las medidas que usaste para la base y duplícala. ¿Qué sucede con la altura si se quiere obtener la misma área? Justifica tu respuesta. ______

______

e) ¿Qué expresión algebraica permite cumplir con la condición de la maestra para la altura del rectángulo a partir de la constante y la medida de la base? ______

9. Completa la tabla que muestra cómo se modifica la velocidad promedio de acuerdo con el tiempo en que se haría un recorrido.

Tiempo del recorrido (h)	8	10	5	12
Velocidad (km/h)	95			

a) ¿Qué tipo de proporcionalidad representa la situación? ______

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______

c) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ______

10. Completa la tabla que muestra el tiempo de llenado de un tinaco, que está dado por la expresión $y = \frac{360}{x}$, donde x representa el flujo de agua en litros por minuto que cae en el tinaco y y representa el tiempo de llenado.

Flujo de agua (L/min)	6				30	32
Tiempo de llenado (min)		40	36	36		

a) ¿Qué hiciste para determinar los valores de x? ______

pareja

11. En parejas, realicen una lectura comentada del siguiente texto.

Para formalizar

Una relación de proporcionalidad inversa es aquella en la que una magnitud disminuye en la misma proporción en la que la otra aumenta o viceversa, aumenta en la misma proporción que la otra disminuye. Por ejemplo, si una magnitud aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad.

La regla general de una relación de proporcionalidad inversa está dada por la expresión $y = \frac{k}{x}$, donde k representa la constante de proporcionalidad.

En una relación de proporcionalidad inversa la constante es igual al producto de las parejas de magnitudes, es decir, $k = xy$, a diferencia de una relación de proporcionalidad directa, donde la constante es un cociente: $k = \frac{y}{x}$ o $y = kx$.

Ponlo en práctica

individual

12. Determina qué tipo de proporcionalidad corresponde a cada situación, también la constante y escribe la expresión algebraica correspondiente.

a) En una construcción, si se contratan 4 hombres con los cuales se espera concluir un trabajo en 24 días, trabajando todos al mismo ritmo, en cuántos días realizarían el mismo trabajo 16 hombres, trabajando al mismo ritmo? ______

Tipo de proporcionalidad: ______ Expresión algebraica: ______

b) Dos personas tardan 6 horas en evaluar 48 expedientes, revisando en el mismo tiempo cada expediente. Si solo se tienen 4 horas para entregar la evaluación, ¿cuántas personas tienen que realizar el trabajo?

______

Tipo de proporcionalidad: ______ Expresión algebraica: ______

c) En un restaurante tienen lista de espera y consideran que cada cliente tardará en entrar al lugar 3 minutos. ¿En cuántos entrarán los 8 clientes de la lista? ______

Tipo de proporcionalidad: ______ Expresión algebraica: ______

13. Completa la tabla que muestra una relación de proporcionalidad inversa.

x	84		31.5		14	
y	1.5	2		6		10.5

a) ¿Qué expresión algebraica representa la situación?

b) Inventa un problema que se resuelva con la información de la tabla.

grupo

14. En grupo y con la coordinación de su profesor, muestren su problema a sus compañeros para validar su composición.

Consulta en...

Para practicar más sobre el tema trabajado en la lección, ingresa a: https://www.vitutor.com/di/p/a_8e.html y resuelve los problemas que ahí se ofrecen.

Repartos proporcionales

Propósito Determinarás la manera más justa de realizar un reparto y resolverás problemas de reparto proporcional.

individual

1. Analiza la información y resuelve los siguientes problemas.

Mariano trabaja en una obra que tiene que entregar en seis días. Empezó a trabajar solo durante dos días; pero al darse cuenta de que no terminaría a tiempo, le pidió ayuda a Javier, quien comenzó a trabajar al tercer día. Pero como no fue suficiente ayuda, Agustín empezó a trabajar en el día cinco, y así fue como pudieron entregar la obra a tiempo.

A la hora de cobrar no se ponían de acuerdo sobre cuánto debería recibir cada uno. Agustín decía que se debería dividir el pago en tres partes iguales, argumentando que gracias a su ayuda lograron terminar a tiempo.

a) ¿Qué opinas de la postura de Agustín, te parece justa? Explica por qué. ______

______

b) ¿Qué forma consideras más justa para realizar el reparto del dinero que recibieron? ______

c) ¿Cuántas días de trabajo suman los tres? ______

______

d) Si en total cobraron $3 600, completa la tabla. Calcula lo que tiene que recibir cada uno. Considera que los tres trabajaron al mismo ritmo, todos los días.

Nombre	Días de trabajo	Ingresos ($)
Mariano		
Javier		
Agustín		
Total		3 600

e) ¿Qué criterio y procedimiento seguiste para completar la columna Ingresos?

______

f) ¿Por qué consideras que tu reparto es justo para los tres? ______

______

pareja

2. Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. Si obtuvieron diferentes resultados, argumenten su postura para defender su reparto. Si ambos consideran válida la postura del otro, más adelante regresen para retomar la situación.

pareja

1. Analicen en parejas la información del problema y resuelvan.

Gabriel y Andrea se asociaron para poner un negocio de venta de equipos de sonido para automóviles. La inversión inicial fue de \$80 000. Gabriel aportó \$30 000, Andrea puso \$50 000. El acuerdo entre ellos fue dividir las ganancias de manera proporcional a la inversión de cada uno.

a) ¿Cómo pueden determinar lo que a cada uno le corresponde si obtienen cierta ganancia? ____________________

En el primer mes, después de separar gastos de mantenimiento y guardar un fondo, les quedaron \$16 000 para repartirse entre los dos.

b) Calculen la ganancia que le corresponde a cada uno y completen la tabla.

Socio	Inversión inicial (\$)	Ganancia (\$)
Andrea		
Gabriel		
Total	80 000	16 000

c) ¿Qué tipo de relación muestran los valores de la tabla? Argumenten su respuesta.

____

Con la intención de crecer, Andrea y Gabriel invitaron a Matías al negocio, quien aportó \$20 000. El trato fue el mismo, dividir las ganancias de acuerdo con la inversión inicial de cada uno.

d) Completen la siguiente tabla que muestra las ganancias que se van a repartir entre los tres socios, cumpliendo con el acuerdo del contrato.

Socio	Inversión inicial (\$)	Ganancia (\$)
Andrea	50 000	
Gabriel	30 000	
Matías	20 000	
Total	100 000	60 000

e) ¿Qué parte de la inversión inicial aportó cada uno? ____________________

f) ¿Qué relación hay entre las parejas de valores: Inversión inicial–inversión total, con ganancia-ganancia total? ____________________

____

En mi entorno

Las herencias son algunas de las situaciones de la vida humana que, a lo largo de la historia, representan los repartos proporcionales. En algunas culturas, como la árabe, las hijas heredaban la mitad de lo que heredaban los hijos varones.

En cuanto al reparto de utilidades en las empresas, existen diferentes criterios para realizarlo: sueldo y días de trabajo, entre otros, buscando la manera más justa de realizar el reparto.

¿Conoces alguna otra situación en la que se realicen repartos proporcionales?

equipo

2. Revisen y comparen sus resultados con los de otros compañeros. Discutan los procedimientos que siguieron para completar las tablas y sobre la relación entre los valores de las columnas de cada tabla: ¿Qué tipo de relación representan? Compartan sus conclusiones con su profesor.

pareja

3. Analicen en parejas la información del problema y resuelvan.

En una competencia de atletismo, participaron tres escuelas secundarias de cierta zona escolar. La escuela A llevó 13 competidores; la escuela B llevó 17 participantes y la C, 15 atletas. Las autoridades entregaron \$1 800 como apoyo de transporte para los competidores.

a) ¿Cuántos atletas acudieron a la comptencia? ______

b) Si el reparto es proporcional, ¿cuánto le corresponde a cada escuela? ______

______

c) ¿Cómo lo determinaron? ______

d) ¿Cuánto le corresponde a cada competidor? ______

4. Tres primos juntan un álbum de estampas de futbol. Para que les saliera más barato, decidieron comprar una caja con 100 sobres y repartirlos de manera proporcional a lo que cada uno aportó. Didier puso \$280, Nery, \$184 y Santiago, \$336.

a) ¿Cuánto pagaron por la caja de sobres? ______

b) Si llamamos x al número de sobres que le corrresponden a Didier, ¿qué expresión permite conocer cuanto vale x? ______

c) Completen la siguiente tabla. Escriban una expresión que permita conocer el valor de cada incógnita y resuelvan.

Nombre	Aportación (\$)	Sobres que le corresponden
Didier	280	$x =$
Nery	184	$y =$
Santiago	336	$z =$
Total		$x + y + z = 100$

d) ¿Qué relación hay entre lo que cada uno aportó y el número de sobres que le corresponden? ______

e) ¿Por qué consideran que a este tipo de relaciones se les llama repartos proporcionales? ______

grupo

5. Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros compañeros. ¿Qué relación tiene el problema de la actividad 3 con el **valor unitario**? ¿Es posible resolver el problema 4 por medio de razones equivalentes: $\frac{x}{280} = \frac{y}{184} = \frac{z}{336} = \frac{100}{800}$?, donde x, y y z, corresponden a los sobres que le tocan a cada primo? Comenten lo anterior y registren sus conclusiones.

Glosario

Valor unitario Es el valor o precio de una unidad o de una pieza.

equipo

6. Lean en equipo la siguiente información. Al final, regresen a las actividades previas para revisar sus procedimientos y resultados, para validar o corregir, si fuera necesario.

Un reparto proporcional es aquel en el que se divide una cantidad de manera proporcional entre todas las partes o magnitudes involucradas, por lo tanto, representa una relación de proporcionalidad directa.

Por ejemplo, se quieren repartir \$500 en tres partes proporcionales a 6, 7 y 12. Existen diferentes procedimientos para realizar el reparto proporcional:

Valor unitario o reducción a la unidad: primero se obtiene la parte que le corresponde a cada unidad de las partes en que se reparte:

Se suma: $6 + 7 + 12 = 25$; y luego se divide $500 \div 25 = 20$; a cada unidad le corresponden 20 pesos de la cantidad para repartir. Por tanto,
$6 \times 20 = 120$; $7 \times 20 = 140$; $12 \times 20 = 240$; comprobamos: $120 + 140 + 240 = 500$.

También se puede resolver por medio de razones equivalentes, utilizando regla de tres. Por ejemplo, si asignamos literales *x*, *y* y *z* a las cantidades recibidas:

$\frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{12} = \frac{500}{40}$ y resolvemos cada razón por separado:

$x = \frac{6 \times 500}{40} = 120$ $\quad y = \frac{7 \times 500}{40} = 140$ $\quad z = \frac{12 \times 500}{40} = 240$;

$\frac{120}{6} = \frac{140}{7} = \frac{240}{12} = \frac{500}{40}$

Otra forma es por medio de porcentajes. ¿Qué porcentaje de 40 es 6? Pero también existen otros procedimientos, lo importante es analizar la situación para decidir cuál es el más adecuado.

7. Retomen el problema inicial de la página 114 y revisen que su reparto haya sido proporcional a los días trabajados. Después, realicen lo que se pide.

Cantidad para repartir: \$3 600; días trabajados: Mariano 6, Javier 4 y Agustín 2.

a) Resuélvanlo por medio del valor unitario.

Total de días trabajado (suma): ________ Valor unitario (división): ________

Mariano (*x*): ________ Javier (*y*): ________ Agustín (*z*): ________

b) Ahora resuélvanlo por medio de razones equivalentes.

$\frac{x}{6} = \text{—} = \text{—} = \frac{3\,600}{12}$ $\qquad \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3\,600}{12}$

$x = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad y = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad z = \frac{\quad}{\quad} =$

8. ¿Usaron alguno de estos procedimientos? Comenten alguna situación en la que convenga usar uno u otro procedimiento. Registren las situaciones en su cuaderno y valídenlas en grupo.

Ponlo en práctica ▸

individual

9. Resuelve el siguiente problema.

Emiliano y Carlo compraron un paquete con 36 carros de colección, por el que pagaron \$450.

a) Si el reparto lo hicieron de manera proporcional y Emiliano se quedó con 12 carros y Carlo con 24, ¿cuánto dinero puso cada uno? ____________________

b) ¿Qué hiciste para determinarlo? ____________________

10. Completa las siguientes tablas de manera que las cantidades representen un reparto proporcional.

Magnitud	Cantidad	Le toca...
a	12	
b	17	
c	11	
Total		1 500

Magnitud	Cantidad	Le toca...
x	3	
y	8	
z	15	
Total		546

11. Resuelve los problemas.

a) Para preparar un cubeta de 25 litros de pintura mezclaron 14 L de pintura blanca, 2 L de pintura roja y 9 L de pintura amarilla. Si quieren preparar 45 litros del mismo tono, ¿cuánta pintura tienen que usar de cada color? ____________________

b) Cuatro cuadrillas pintaron las líneas de una carretera de 180 km de longitud. Mientras la cuadrilla 1 pintaba 2 km, la 2 pintaba 3 km; la 3, 4 km y la 4, 6 km. Si trabajaron al mismo ritmo, ¿cuántos kilómetros pintó cada cuadrilla? ____________________

c) Hilda vive en un edificio en el que hay 5 departamentos. Por acuerdo entre los vecinos, se dividen el pago del agua de manera porporcional al número de habitantes por departamento. En los departamentos hay 2, 2, 3, 5 y 6 personas.

Si en el último bimestre el recibo llegó de \$495, ¿cuánto tiene que aportar cada departamento? ____________________

Si al siguiente bimestre pagan \$640, ¿cuál es la aportación de cada departa mento? ____________________

individual

1. Anota proporcionalidad *directa* o *inversa*, según corresponda a cada oración.

◀ Integramos

a) Al aumentar una cantidad, la otra disminuye en la misma proporción. ________

b) La regla general es $y = kx$, donde k representa la constante de proporcionalidad.

____

c) Si una magnitud disminuye n veces, la otra disminuye las mismas n veces.

____

d) La constante es igual al producto de las magnitudes involucradas. ________

2. Completa la siguiente tabla que muestra cómo varía el tiempo, de acuerdo con la velocidad, en un recorrido en carretera de cierta distancia.

km/h	96		70		8.5	
Tiempo (h)	2.5	2.4		3		2.18

¿De cuántos kilómetros es el recorrido? ________

3. Un barco de pesca transporta comida y agua para alimentar a 15 tripulantes durante 40 días, considerando que todos comen lo mismo por día.

a) Si todos comen lo mismo por día y al viaje van 12 tripulantes, ¿para cuántos días alcanzarían los víveres? ________

b) Si el número de tripulantes fuera de 20, ¿cuántos días durarían los víveres? ________

____

4. Resuelve los siguientes problemas:

a) Manuel quiere regar 280 kg de fertilizante de manera proporcional en el área de tres terrenos que miden 2.3, 3.5 y 5 hectáreas. ¿Cuántos kg debe destinar a cada terreno? ________

b) Si se reparten \$2 800 de manera proporcional a las edades de tres personas que tienen 6, 8 y 11 años, ¿cuánto dinero le corresponde a cada una? ________

____

Si al siguiente año se reparte el mismo dinero a las mismas personas, de la misma manera, ¿cuánto le corresponde a cada una? ________

c) ¿El problema de Manuel representa una situación de proporcionalidad inversa? ¿Por qué?

____

____

Aprendizaje esperado: Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

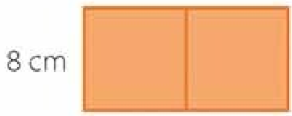
Uso de modelos geométricos

Perímetros y áreas

Exploramos

individual

1. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras geométricas.



P = ______________ P = ______________

A = ______________ A = ______________

a) Escribe las operaciones que realizaste para obtener las medidas.

Figura 1: ______________________________________

Figura 2: ______________________________________

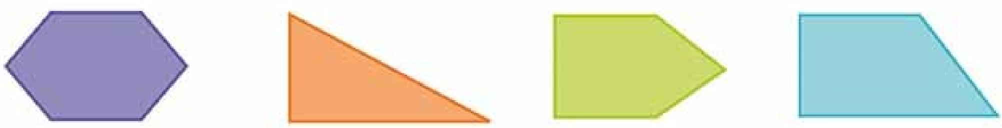
b) Escribe otra secuencia de operaciones para obtener las medidas anteriores.

Figura 1: ______________________________________

Figura 2: ______________________________________

2. Analiza las figuras y relaciónalas con la expresión que permite obtener su perímetro.

$a + b + c$ $n + m + 2p$ $3x + 2y$ $2d + e$ $4r + 2s$



3. Escribe algebraicamente las siguientes expresiones.

a) Se multiplica la base por la altura y el resultado se divide entre 2: ____________

b) El área de un rectángulo cuya base mide 2 u más que la altura es: ____________

c) Perímetro de una figura con 2 lados iguales y 2 lados desiguales: ____________

d) El perímetro de un triángulo equilátero es: ____________

e) El área de un trapecio es igual a: ____________

pareja

4. Compara tus respuestas con las de un compañero. En caso de diferencia, verifiquen que sus expresiones sean correctas asignando un valor numérico a cada literal.

Expresiones equivalentes en áreas y perímetros

Propósito Representarás el área y el perímetro de figuras geométricas utilizando expresiones algebraicas equivalentes.

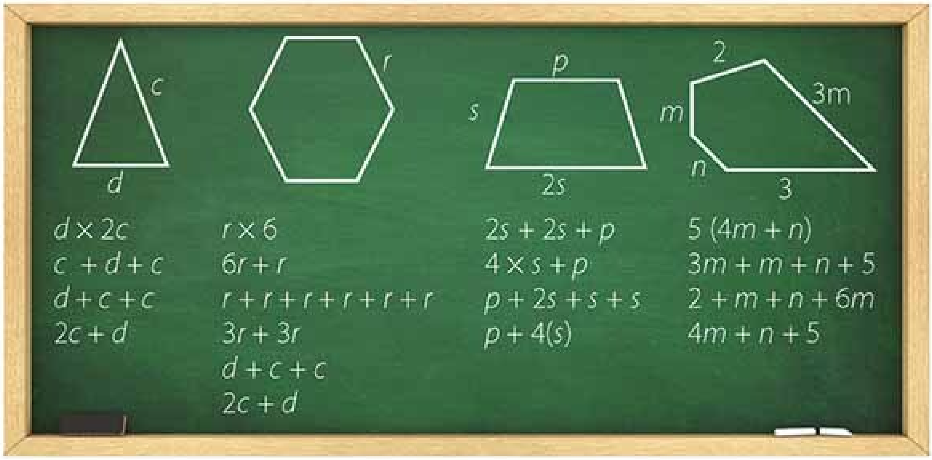
◂ Transitamos

pareja

1. Lean la información, analicen las figuras y resuelvan.

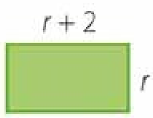
La profesora de matemáticas pidió a sus alumnos escribir el perímetro de las figuras del pizarrón. Las respuestas son las que se muestran.

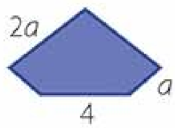
a) Subrayen las que son correctas.



b) ¿Cómo pueden comprobar que las respuestas que eligieron son correctas y las otras no? ____________________

2. Escriban de dos maneras el perímetro de las siguientes figuras.





P = __________ P = __________ P = __________

P = __________ P = __________ P = __________

a) Si $r = 4$, calculen el perímetro del rectángulo usando las dos expresiones que escribieron: ____________________

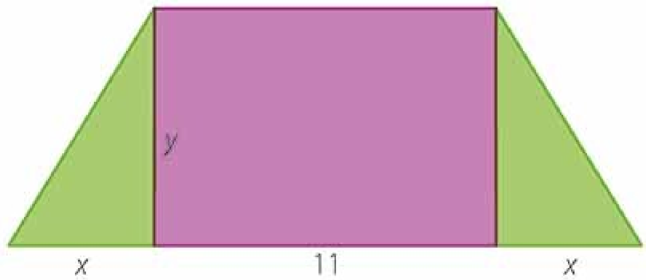
b Si x vale 5, calculen el perímetro del rombo con ambas expresiones.

c) Calculen el perímetro del pentágono considerando que $a = 2.5$.

3. Compara tus expresiones con las de otros compañeros. Si no obtuvieron el mismo resultado en cada caso, revisen sus procedimientos en busca del posible error.

equipo

4. Analicen la siguiente figura, que se contruyó con un rectángulo y dos triángulos rectángulos iguales, y resuelvan.



a) Escriban el área de la figura como la suma del área de las tres figuras que la forman:

____

b) ¿Qué forma tiene la figura resultante? ______________

c) Escriban el área aplicando la fórmula de la figura que se forma: ______________

d) ¿La expresiones de los incisos a y c son equivalentes? ¿Por qué? ______________

____

e) ¿La expresión $11y + xy$, ¿representa el área de la figura? Justifiquen su respuesta.

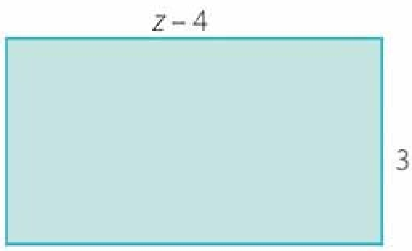
____

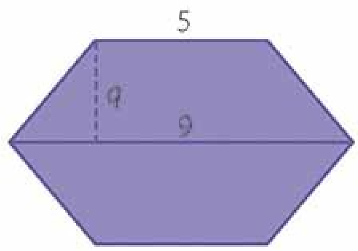
f) ¿Por qué al asignarles un valor numérico a las literales y resolver las operaciones, se obtienen los mismos resultados? ______________

____

g) Asignen diferentes valores numéricos a x y a y para verificar que lo anterior se cumple. Prueben con diferentes números para validar que las igualdades siempre se cumplen.

5. Anoten de dos maneras el área de las siguientes figuras.





Área = ______________ Área = ______________

Área = ______________ Área = ______________

a) Sí z vale 14, ¿cuál es el área del rectángulo? ______________

b) Si q vale 3.5, ¿cuál es el área de la segunda figura? ______________

6. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten sobre las estrategias que pueden seguir para comprobar que dos expresiones algebraicas son equivalentes. Registren sus acuerdos con el apoyo del profesor.

pareja

7. Lean en parejas la siguiente información. Al final, validen las conjeturas a las que llegaron en la actividad anterior.

Para formalizar

Como sabes, una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de operación, por ejemplo, $2a$, $3x + y$, $4 + z$, etcétera.

Se dice que dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando representan lo mismo, escrito de diferentes formas. Por ejemplo: $x + x + x = 3x$. Mediante expresiones algebraicas equivalentes, se puede representar el área y el perímetro de figuras geométricas cuando desconocemos una o varias de sus medidas, como muestra el siguiente ejemplo:

$P = 2(x + 2 + 7) = 2x + 18$ $\quad$ $A = 7x + 14 = 7(x + 2)$

Para comprobar si dos o más expresiones son equivalentes, se le asignan valores numéricos a las literales y se resuelven las operaciones involucradas. En el ejemplo anterior, si $x = 8$, entonces,

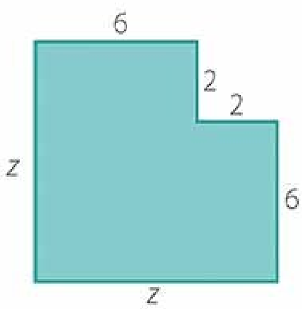
$P = 2(8 + 2 + 7) = 16 + 4 + 14 = 34$; $P = 2(8) + 18 = 16 + 18 = 34$

$A = 7(8) + 14 = 56 + 14 = 70$; $A = 7(8 + 2) = 56 + 14 = 70$

Ponlo en práctica

individual

8. Elige todas las expresiones que corresponden al perímetro de la siguiente figura.



Perímetro:

$2(z + 6 + 2)$

$16 + z + z$

$z + z + 6 + 2 + 2 + 6$

$2(2z) + 12 + 4$

$12 + 4 + 2z$

Consulta en...

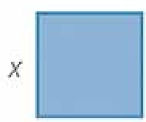
Consulta la página: https://goo.gl/zf3WPG Resuelve los ejercicios para practicar las expresiones equivalentes.

9. Sustituyan z por un valor numérico para validar sus respuestas.

a) ¿Cuál es el perímetro de la figura si $z = 8$? ____________

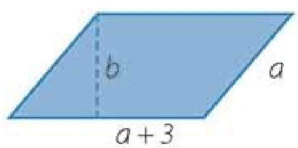
b) Si z vale 11, ¿cuál es el perímetro de la figura? ____________

10. Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes para el área y el perímetro de las siguientes figuras.



P = ____________

A = ____________



P = ____________

A = ____________

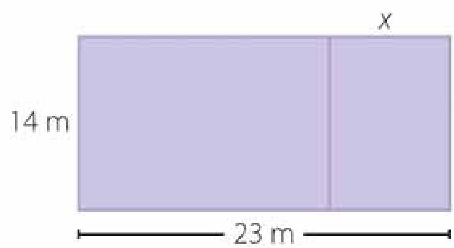
Expresiones equivalentes en modelos geométricos

Propósito Utilizarás modelos geométricos para representar expresiones algebraicas equivalentes.

pareja

1. En parejas, lean la información y resuelvan el problema.

El señor José tiene un terreno rectangular y decidió dividirlo en dos partes para cederle una a su hijo, como se muestra en la imagen:



a) ¿Cuál es el área de todo el terreno del señor José? ____________

b) Si cedió la parte más pequeña del terreno a su hijo, ¿cuál es el área de dicho terreno? ____________

c) Si el hijo de José decide poner una cerca alrededor de su terreno, ¿qué expresión representa el perímetro del terreno? ____________

d) Escribe de otra forma el perímetro del terreno: ____________

e) Escriban de dos maneras el perímetro del terreno que se quedó el señor José:

____

f) Subrayen las expresiones que representan el área del terreno con el que se quedó el señor José.

$14(23 - x)$ $\quad$ $14 \times 23 - 14x$ $\quad$ $14 \times 23 - x$ $\quad$ $14(23 + x)$ $\quad$ $322 + 14x$

g) ¿Cómo pueden demostrar que las expresiones son correctas y difieren de las que no eligieron? ____________

h) Si el terreno con que se quedó el señor José mide 210 m^2, ¿cuánto vale x? ______

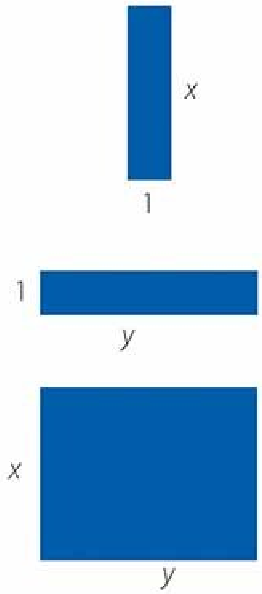
Expliquen cómo obtuvieron la respuesta. ____________

____

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En la última pregunta, si existen diferencias, discútanlas con el fin de obtener una respuesta única y correcta. Después, sustituyan a x por su valor numérico en todas las expresiones que escribieron y en las que parecen en el inciso e, y resuelvan. Analicen si todas las respuestas fueron iguales. Si no fue así, comenten qué sucedió.

individual

3. De manera individual, contesta las preguntas con base en las figuras de la derecha.

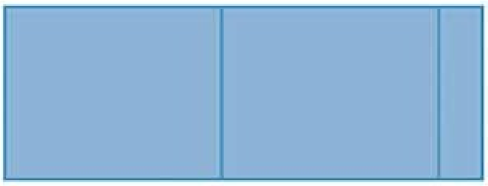


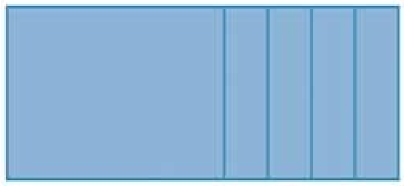
La maestra entregó a sus alumnos varias de las siguientes figuras y les pidió que representaran con ellas la expresión algebraica: $2xy + 3x$.

a) Dibuja en el siguiente espacio una figura que cumpla con la expresión algebraica correspondiente:

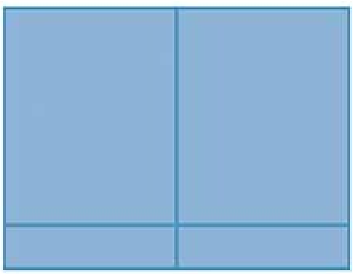
b) Escribe de dos formas la misma expresión: ____________________

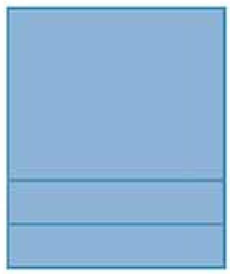
4. Escribe de dos maneras la expresión algebraica que representa el área y el perímetro de las siguientes construcciones.





____________________ ____________________





____________________ ____________________

5. Escribe una expresión algebraica equivalente a cada expresión dada, y represéntalas, en su cuaderno, utilizando los modelos geométricos.

a) $x(2y + 2) =$ ____________________ b) $2x + xy =$ ____________________

c) $(y + 4)(3x) =$ ____________________ d) $(x + 2)y =$ ____________________

pareja

6. Compara tus respuestas con las de un compañero. Si existen diferencias, coméntenlas en busca de llegar a acuerdos. Si es necesario, busquen el apoyo de otros compañeros.

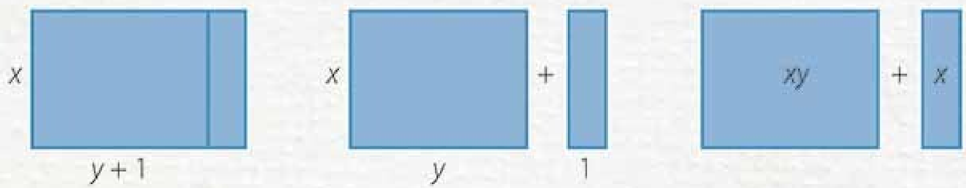
pareja

Para formalizar

7. Realicen una lectura comentada de la siguiente información. Después, validen sus resultados.

La propiedad distributiva de la multiplicación permite simplificar expresiones en las que se multiplica por una suma o una resta. Lo anterior se puede demostrar usando los modelos geométricos.

$$x(y+1) \quad = \quad (x)(y) + (x)(1) \quad = \quad xy + x$$



Otro ejemplo: $(y + 1)\,(x + x) = y(x + x) + 1(x + x) = 2yx + 2x$

A expresiones algebraicas como las anteriores se les conoce como **identidades algebraicas**, porque representan igualdades que se pueden comprobar asignando cualquier valor numérico a las literales, es decir, las literales pueden adquirir cualquier valor y la igualdad se conserva.

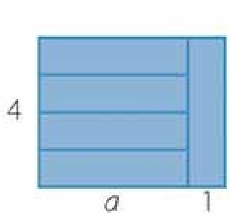
individual

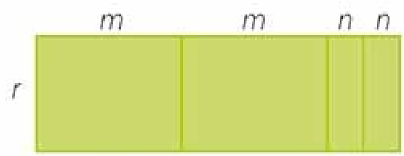
8. Relaciona cada expresión algebraica con su equivalente en el siguiente reglón.

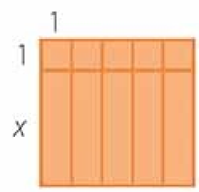
$3(x + xy)$ $\qquad$ $x(y + 3)$ $\qquad$ $x(3 + 4)$ $\qquad$ $(x + 1)(2y + 2)$

$xy + 3x$ $\qquad$ $2xy + 2x + 2y + 3$ $\qquad$ $3x + 3xy$ $\qquad$ $7x$

9. Expresa el área de las siguientes construcciones de dos maneras.







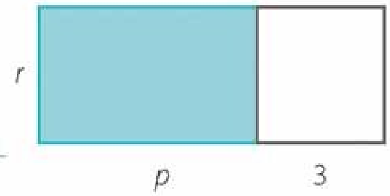
______________ ______________ ______________

______________ ______________ ______________

10. Compara tus resultados con los de algunos compañeros. Si aún existen dudas, busquen el apoyo del profesor para resolverlas.

individual

1. Observa la figura y responde. ◂ Integramos



a) Escribe el perímetro de la figura de dos maneras:

_______________ = _______________

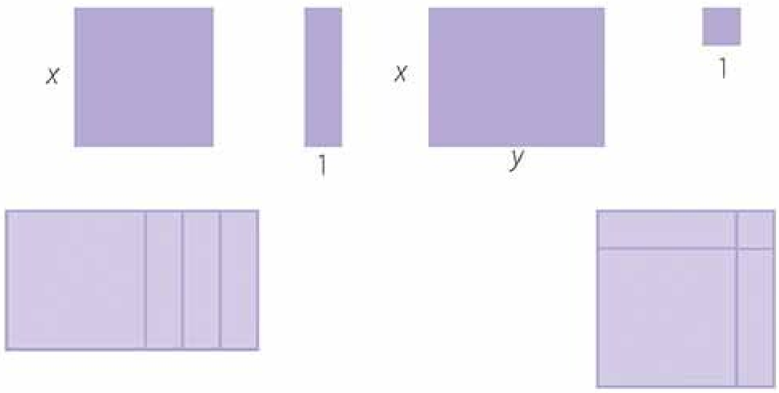
b) ¿Cuál es el área de toda la figura? ____________________________

c) Escribe de dos maneras la medida del área de color:

____

2. Escriban de dos maneras el área y el perímetro de los rectángulos.

3. Considera las siguientes figuras y escribe de dos maneras el perímetro de las siguientes construcciones.



a) ____________________________ b) ______________________________

4. Representa las siguientes expresiones algebraicas con las figuras anteriores y escribe una expresión equivalentee. Después, escribe la expresión que representa el perímetro de tus figuras de dos maneras diferentes.

a) $y(x + 1) =$ _________________ b) $2x(2y + 1) =$ _________________

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Sistemas de medidas

Litros, kilogramos y metros

individual

Exploramos

1. Escribe en mililitros la capacidad de las siguientes botellas de jugo de uva que produce una compañía.

_______ _______ _______ _______ _______ _______

2. Resuelve.

a) Aranza participa en una carrera de 5 km. ¿Cuántos metros tiene que recorrer para completar la carrera? _______

b) En una competencia de salto de altura, Ana brincó 1.85 m. ¿De cuántos centímetros fue su salto? _______

c) ¿Cuántos gramos equivalen a 1 kg? _______

d) Si la masa de Emiliano es de 46.7 kg, ¿cuál es su masa en gramos? _______

e) ¿Cuántos kg hay en media tonelada? _______

3. Resuelve las siguientes operaciones por números que son potencias de 10.

a) $3.4 \times 100 =$ _______ b) $0.17 \times 1\,000 =$ _______ c) $1.85 \times 10 =$ _______

d) $0.97 \times 1\,000 =$ _______ e) $73 \times 10\,000 =$ _______ f) $196.8 \div 1\,000 =$ _______

g) $49 \div 10 =$ _______ h) $0.93 \div 100 =$ _______ i) $7.8 \div 10\,000 =$ _______

equipo

4. Compara tus respuestas con las de algunos de tus compañeros. Comenten qué unidades para medir longitudes, capacidad y masa conocen y cuál es la equivalencia entre ellas.

Múltiplos y submúltiplos de unidades del SI

Propósito Resolverás problemas que implican conversiones entre múltiplos y submúltiplos de unidades de longitud, capacidad y masa del Sistema Internacional de Medidas (SI) y entre unidades de tiempo.

Transitamos

pareja

1. Reúnete con un compañero y resuelvan las siguientes situaciones.

Antonieta participó en el maratón de la CDMX. El recorrido de una carrera de maratón es de 42.195 km.

a) Si 1 km = 1 000 m, ¿cuántos metros después de los 42 km se tienen que recorrer para llegar a la meta? ______________________

b) ¿A cuántos centímetros equivalen 0.195 km? ______________________

c) ¿Qué distancia recorrió Antonieta en metros? ______________________

d) Si Antonieta corrió a un promedio de 4 minutos por kilómetro, ¿cuántos metros recorrió cada minuto? ______________________

e) Si sufrió un calambre en el kilómetro y caminó durante 12.5 decámetros (1 dam = 0.01 km), ¿cuántos metros caminó? ______________________

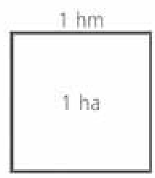
f) ¿Qué procedimiento permite pasar de kilómetros y de centímetros a metros?

____

En mi entorno

El Comité Internacional de Pesas y Medidas estableció el nombre de Sistema Internacional de Medidas (SI) en 1956, y en el año 1960 ese mismo cómite acordó los símbolos de las unidades base y se designaron sus múltiplos, submúltiplos y sus símbolos.

2. Analicen la siguiente información y resuelvan.



Una hectárea (ha) es una unidad de superficie equivalente a un cuadrado que mide 1 hectómetro de lado, es decir, 1 hm × 1 hm = 1 hectárea.

a) Si una hectárea es equivalente a un cuadrado de 10 000 m^2, ¿a cuántos metros equivale un hectómetro? ______________________

b) ¿Cuántos hectómetros equivalen a 1 km? ______________________

c) Don Miguel tiene un terreno rectangular que mide 1.35 hm de largo por 1.16 hm de ancho. ¿Cuáles son sus medidas en kilómetros? ______________________

d) ¿Cuántos metros representan las medidas anteriores? ______________________

Basilisco. Animal que tiene la habilidad de caminar sobre la superficie del agua.

Marcela investigó sobre la velocidad que pueden alcanzar algunos de los animales más veloces del mundo.

3. Investigó sobre los basiliscos que son animales conocidos por su capacidad para caminar o correr sobre el agua. Pueden alcanzar velocidades de hasta 5.4 km/h.

Marcela quiere saber cuántos metros recorrería un basilisco en una hora a su máxima velocidad.

a) ¿Cómo puede determinarlo? ¿Cuánto metros equivalen a 5.4 km? ____________

b) ¿Cuántos cm equivalen a 5.4 km? ____________

c) ¿Cuántos metros recorrerá en 10 segundos a su máxima velocidad? Expliquen su resultado: ____________

Consulta en...

Ingresa a: https://bit.ly/2MiWU6R, lee la información sobre las unidades de longitud y resuelve los ejercicios para practicar.

4. También investigó que el guepardo es el animal más veloz sobre la Tierra. Puede alcanzar una velocidad de 114 km/h.

a) Considerando dicha velocidad, ¿cómo puede saber Marcela cuántos metros recorre por minuto el guepardo? Explica tu respuesta. ____________

b) Si 1 m = 0.1 dam y el guepardo sólo puede mantener dicha velocidad en 0.5 km, ¿durante cuantos decámetros (dam) puede mantenerla? ____________

____

c) Aproximadamente, ¿en cuántos segundos recorre la distancia anterior? ____________

____

5. Completen la siguiente tabla de equivalencias a partir de las relaciones vistas entre las diferentes unidades de longitud.

Medida	m	dm	cm	mm	km	hm	dam
17 m							
185 cm							
3.2 hm							
6 dam							
508 dm							

equipo

6. Comparen sus conversiones con las de algunos de sus compañeros. Comenten la estrategia que permite pasar de una unidad menor a una unidad mayor y viceversa. Discutan lo anterior en busca del procedimiento adecuado. Registren sus acuerdos en el cuaderno.

equipo

7. Reúnanse en equipo para resolver las siguientes situaciones.

Antonieta compró 4 botellas de jugo de 3.785 litros cada una para una reunión en su casa, y quiere comprar paquetes de vasos que tienen capacidad de 300 ml.

a) Si cada paquete contiene 15 vasos, ¿cuántos paquetes necesita para poder servir todo el jugo sin que le falten vasos? ______________________________

____

b) Describan lo que hicieron para determinarlo. ______________________________

____

____

c) ¿Cuál es la capacidad de todos los vasos, en litros? ______________________________

d) Si cada botella de jugo tiene capacidad de 37.85 decilitros (dL), ¿cuántos litros son iguales a un decilitro? ______________________________

8. Una alberca olímpica mide 50 m de largo y en promedio tiene una capacidad aproximada de 2 500 kilolitros (kL) de agua, dependiendo de su profundidad.

a) ¿Cuántos litros de agua contiene una alberca olímpica? ______________________________

____

b) Si un hectolitro es igual a 100 litros, ¿cuál es la capacidad de la alberca en hectolitros? ______________________________

____

c) Si una alberca olímpica, que está completamente vacía, se llena a razón de 1200 L/min, ¿cuántos litros caen por segundo? ______________________________

d) ¿Cuántas horas tardará en llenarse la alberca? Expliquen su procedimiento. ______

____

Consulta en...

Visita la siguiente página electrónica: https://bit.ly/2MiWU6R y resuelve los ejercicios sobre unidades de capacidad y de tiempo.

9. Realicen las siguientes conversiones entre unidades de capacidad.

a) 19.4 L = ____________ hL	b) 3.7 L = ____________ dL
c) 1 287 mL = ____________ daL	d) 2 450 cL = ____________ L
d) 16 kL = ____________ cL	e) 5 127 mL = ____________ dL

equipo

10. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Comenten qué cálculos hicieron en cada caso para responder. Al terminar, comenten si existe algún otro procedimiento para resolver los problemas; en caso afirmativo, socialícenlo con todo el grupo.

equipo

11. Reúnanse en equipo, lean la información y resuelvan los problemas.

Es importante entender y diferenciar el peso y la masa. La masa es la medida de la cantidad de materia que tiene un cuerpo y se mide en kilogramos (kg). La masa siempre es la misma, sin importar el lugar donde se encuentre el cuerpo.

El peso designa la medida resultante de la acción que ejerce la gravedad terrestre sobre un cuerpo. Es decir, la masa de una persona es la misma en la Tierra y en la Luna, pero el peso no, porque depende de la fuerza de gravedad.

Rubén se encuentra a dieta, pues necesita bajar 8 kg, por recomendación de su médico.

a) Si el plan es bajar 350 g por semana, ¿en cuánto tiempo logrará bajar los 8 kg? Expliquen su respuesta. ____________

____

Durante el tratamiento Rubén, toma unas pastillas como suplemento alimenticio, una cada 8 horas.

b) Si compró un frasco con 85 pastillas y cada una contiene 250 miligramos (mg) de vitamina C, ¿cuántos gramos de vitamina C contiene el frasco? ____________

c) ¿A cuántos kilogramos equivale la medida anterior? ____________

d) Si durante todo el tratamiento tiene que consumir las vitaminas, ¿cuántos frascos necesita comprar? Expliquen por qué. ____________

____

12. Observen el siguiente bulto de cemento y resuelvan.

a) ¿Cuántos gramos tiene cada bulto de cemento? ____________

b) Si van a transportar bultos de cemento como el que se muestra, ¿cuántos pueden llevar en una camioneta que tiene capacidad de 1.5 toneladas? ____________

____

c) Si la camioneta transporta diferentes materiales que equivalen a $\frac{3}{4}$ de su capacidad, ¿cuántos kg transporta? ____________

grupo

13. Discutan en grupo las similitudes entre las distintas unidades de medida de longitud, capacidad y masa y sobre la manera de realizar conversiones entre ellas. ¿Qué tienen que hacer para convertir una unidad mayor en una menor y viceversa?

pareja

14. Con tu compañero, realiza una lectura comentada del siguiente texto. Si tienen dudas, consulten con su profesor.

Para formalizar

El Sistema Internacional de Medidas (SI) fue creado con la intención de uniformar las unidades de medida en todo el mundo. Fueron establecidas como unidades principales el **metro**, para medir longitudes; el **litro**, para medir capacidades, y el **kilogramo** para medir la masa.

Pero existen otras medidas: para medir cosas muy grandes se usan los múltiplos y para medir cosas pequeñas se usan los submúltplos.

Los múltiplos inician con los prefijos: *kilo* = 1 000 u; *hecto* = 100 u, *deca*: 10 u.

Los submúltiplos inician con los prefijos: *deci* = 0.1 u; *centi* = 0.01 u, *mili* = 0.001 u.

A los prefijos anteriores se les agrega la palabra "metro", "litro" o "gramo". Por ejemplo, *kilogramo*, *hectolitro*, *decámetro*, *decímetro*, *centígramo*, *mililitro*.

Cada unidad es 10 veces mayor que la inmediata inferior y 10 veces menor que la inmediata superior.

Para pasar de una unidad mayor a una menor se multiplica por una potencia de 10, según los lugares entre las unidades.

Para pasar de una unidad menor a una mayor se divide por una potencia de 10, según los lugares entre las unidades, como se muestra:

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10

kilo	hecto	deca	metro litro gramo	deci	centi	mili

×10 ×10 ×10 ×10 ×10 ×10

La tonelada (t) es un múltiplo del kilogramo: 1 t = 1 000 kg.

individual

Ponlo en práctica

15. Resuelve los siguientes problemas.

a) Se preparó carne para una reunión a razón de 3 kg para 8 invitados. Si asisten 28 invitados, ¿cuántos dag de carne se necesitan? ____________________

b) Karla realiza una caminata todos los días en un parque cerca de su casa. Ella camina a un ritmo promedio de 4.5 km/h. Si camina durante 35 minutos, ¿cuántos decámetros recorre? ____________________

c) Un tinaco tiene una fuga y se desperdicia agua a razón de 12 L/min. ¿Cuántos mililitros de agua se pierden por segundo? ____________________

16. Calcula los ingredientes que se necesitan para preparar una gelatina para 24 y para 30 porciones, en las unidades que se indican.

Ingredientes	Para 5 porciones	Para 24 porciones	Para 30 porciones
Grenetina	15 g	mg	dag
Agua	125 ml	L	hL
Leche	0.275 L	cL	kL
Fruta	140 g	kg	dg

17. Realiza las siguientes conversiones.

a) 8.02 km = ______________ dm

b) 1.8 hm = ______________ mm

c) 27 dam = ______________ km

d) 295 cm = ______________ hm

e) 5 917 dL = ______________ mL

f) $2\frac{1}{4}$ dL = ______________ daL

g) $\frac{3}{4}$ kg = ______________ t

h) 43.8 g = ______________ mg

18. Escribe la medida de cada objeto en las unidades que se indican.

hg ______________ mL ______________ km ______________

19. Resuelve.

a) En su última siembra, José logró cosechar 3.015 toneladas de manzanas. ¿Cuántos kilogramos representa la cosecha de José? ______________

b) Si una manzana pesa en promedio entre 210 g y 350 g, considerando la media de los valores anteriores, aproximadamente, ¿cuántas manzanas cosechó?

____

Unidades de longitud del sistema inglés

Propósito Resolverás problemas que implican conversiones entre unidades de longitud del Sistema Internacional de Medidas (SI) y unidades del sistema inglés.

equipo

1. Reunidos en equipo, resuelvan las siguientes actividades.

Néstor veía por primera vez un partido de futbol americano y el comentarista dijo: "Qué gran corrida, el corredor avanzó 25 yardas"…

Néstor le preguntó a su papá qué medida era esa y a cuántos metros equivalía. Su papá le respondió que era una medida de longitud del sistema inglés y que la distancia que avanzó el corredor era equivalente a 22.85 m.

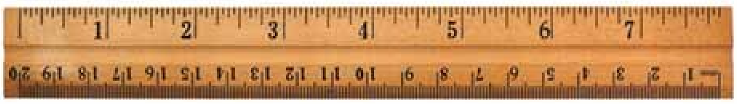
a) ¿Cómo puede Néstor saber cuántos metros son iguales a 1 yarda? ____________________

____

b) ¿Cuántos m y cm son iguales a 1 yarda (yd)? ____________________

c) ¿Cuántos metros se recorren en un pase de 8 yd? ____________________

Su papá le comentó a Néstor que la pulgada (in) era otra medida del Sistema Inglés y le pidió que le mostrará su regla, porque ahí podría ver cuántos cm son igual a 5 in.



d) Ubiquen 5 in en la regla y determinen, aproximadamente, a cuántos cm equivalen. Expliquen su procedimiento. ____________________

____

e) ¿Cuántos cm son equivalentes a 1 in? ____________________

f) ¿Cuántas pulgadas son iguales a 1 yd? ____________________

Otra unidad de medida de longitud del Sistema Inglés es el **pie**, que es una unidad de medida basada en el pie humano y fue utilizada por civilizaciones antiguas. Un pie (ft) es igual a 12 in.

g) ¿A cuántos cm equivale 1 pie? Justifiquen su respuesta. ____________________

h) Calculen cuántos pies son iguales a una yarda. 1 yd = ____________________

2. Comparen en grupo sus respuestas. Si existen diferencias, busquen el apoyo del profesor para llegar a respuestas en común. Cuando hayan llegado a acuerdos, comenten el procedimiento para pasar de unidades del Sistema Internacional al sistema inglés y viceversa.

En mi entorno

El Sistema Inglés es un sistema de unidades que se usa en diferentes países del mundo, como Inglaterra y Estados Unidos de América. Seguramente has oído hablar de galones, de pulgadas y de yardas, que son medidas que se utilizan de manera cotidiana. Cada una de estas unidades tiene su equivalencia en el Sistema Iinternacional de Medidas. ¿Qué artículos se venden en unidades del Sistema Inglés?

parejas

3. En pareja, lean la información y resuelvan. Antes de contestar, discutan los procedimientos para obtener las respuestas correctas.

En mi entorno

Otra de las unidades del Sistema Inglés es la milla (mi), que se utiliza para medir grandes distancias, por ejemplo, la que hay entre dos ciudades.

Édgar viajó a Estados Unidos de América. Durante su viaje, en una carretera había un letrero que decía que cierto lugar al que iría, estaba a 60 millas (mi). Al investigar, Édgar supo que había recorrido 96.54 km.

a) ¿Un kilómetro mide más o menos que una milla? ______________________

____

b) ¿Cómo pueden saber Edgar cuántos kilómetros son iguales a una milla? ¿Cuál es la equivalencia? ______________________

____

c) Calculen cuántas yardas son iguales a una milla. Redondeen el resultado al número entero más cercano: ______________________

____

4. Observen el anuncio que se encontró Édgar en una carretera y anoten los kilómetros que se tienen que recorrer para llegar a cada lugar. Consideren que los números representan millas.

a) Palmdale: ______________

b) Lancaster: ______________

c) Los Angeles: ______________

d) ¿Cuántas millas recorre Edgar en un viaje de 124 km? ______________

e) Si Carlos realiza un viaje a una velocidad constante de 55 mi/h, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 40 minutos? Escriban las operaciones para responder. ______

____

5. Realicen las siguientes equivalencias.

Medida	Procedimiento	Equivalencia
12.5 km	12.5 ÷	mi
31.7 in		mm
145 m		yd
28 ft		m
25 mi		m

equipo

6. Comparen sus respuestas con las de otros alumnos; si en algo tienen dudas, exprésenlas y aclárenlas con la ayuda de su profesor.

parejas

7. Lean la siguiente información. Después, contrástenla con sus conclusiones para validar o corregir si fuera necesario.

Para formalizar

Las unidades del sistema inglés para medir longitudes son: la pulgada (in), el pie (ft), la yarda (yd) y la milla (mi).

Al igual que las unidades del SI, las unidades del sistema inglés tienen sus equivalencias, como se muestra enseguida:

1 milla = 1 760 yd; 1 yd = 3 ft; 1 ft = 12 in

Las equivalencias entre las unidades del Sistema Inglés y las del SI son:
1 in = 2.54 cm; 1 ft = 30.48 cm; 1 yd = 0.914 m = 91.14 cm; 1 mi = 1.609 km

Para convertir unidades del sistema inglés al SI, se multiplica la medida por su equivalente, y cuando la conversión es a la inversa, se divide. Por ejemplo:

$3\frac{1}{4}$ in = 3.25 × 2.54 = 8.255 cm; 45 km = 45 ÷ 1.609 = 27.96… mi

individual

Ponlo en práctica

8. Resuelve los siguientes problemas.

a) Los tornillos se venden en pulgadas. Si Antonio necesita tornillos que miden 11.4 cm, aproximadamente, ¿de qué medida tiene que perdirlos? ____________

b) Luis investigó que la estatura promedio del hombre mexicano es de 1.69 m. Durante su investigación observó que la estatura promedio de los estadounidenes era de 5 ft y 9 in.

¿En qué país la estatura promedio es mayor? ____________

¿Cuál es la estatura promedio de los estadounidenses en metros? ____________

c) Una cancha de basquetbol profesional mide $31\frac{1}{3}$ yd de largo y $16\frac{2}{3}$ yd de ancho. Si en la CDMX quieren hacer una cancha con esas medidas, ¿cuáles deben ser sus medidas en metros? ____________

9. Realiza las siguientes conversiones.

a) 125 m = ____________ yd

b) $24\frac{1}{3}$ in = ____________ cm

c) 18.5 mi = ____________ km

d) 17 yd = ____________ cm

e) 47 m = ____________ yd

f) 108 mm = ____________ in

g) 78 m________ = yd = ________ ft

h) 85 mi = ________ km con ________ m

i) 4 ft y 8in = ____________ cm

j) 1 651 mm = ______ ft con 5 ______ in

Unidades de masa del sistema inglés

Propósito Resolverás problemas que implican conversiones entre unidades de masa del SI y unidades del sistema inglés.

parejas

1. Lean en parejas la información y resuelvan.

El boxeo es un deporte que se practica en todo el mundo, se desarrolla en Juegos Olímpicos y de manera profesional. El boxeo profesional se divide en 17 categorías de acuerdo con el "peso" de los boxeadores. Van desde categoría "paja", que son boxeadores cuya masa es menor que 105 libras (lb), es decir, menos de 47.67 kg, hasta la categoría "peso completo", cuya masa es mayor que 200 lb.

a) A partir de la información anterior, determinen cuántos kg son iguales a una libra. 1 lb = _____ kg. Expliquen el procedmiento que siguieron para responder.

____

b) ¿Cuál es la masa de los boxeadores de "peso completo"? _______________

2. Completa la tabla que muestra otras de las categorías del boxeo.

Categoría	Intervalo (lb)	Intervalo (kg)
Mosca	+108 hasta 112	
Gallo	+115 hasta 118	
Pluma	+122 hasta 126	
Ligero	+130 hasta 135	
Welter	+140 hasta 147	

3. Lean la información y resuelvan.

Otras categorías del boxeo son: Súper pluma: masa mayor a 126 lb hasta 130 lb; súper ligero: masa mayor a 135 lb hasta 140 lb; medio: masa mayor a 154 lb hasta 160 lb y crucero: masa mayor a 175 lb hasta 200 lb.

a) Si un boxeador pesa 62.5 kg, ¿a qué categoría pertenece? Justifiquen su respuesta.

____

b) ¿En qué categoría pelea un boxeador de 72 kg? _______________

c) Si el peso súper medio es mayor a 72.64 kg hasta 76.272 kg, ¿cuál es el intervalo en libras? _______________

equipo

4. Comparen sus equivalencias con las de otra pareja. Discutan la estrategia para convertir libras a kg y viceversa, en busca de acuerdos.

equipo

5. Reunidos en equipo, comenten la siguiente información y resuelvan los problemas.

La onza (oz) es una unidad del Sistema Inglés que se utiliza para medir la masa de objetos pequeños.

Sandra compró el chocolate que se muestra y observó que en la etiqueta veía la masa en onzas y en gramos, así que decidió averiguar la equivalencia entre estas medidas.

a) Realiza la conversión, de acuerdo con lo que muestra la etiqueta. Redondea el resultado a dos cifras decimales. ______

______

b) De acuerdo con lo anterior, ¿cuántos g pesa un chocolate de 8 oz?

______

______

c) ¿Cuántos kilogramos pesa un objeto de 16 oz? ______

______

d) ¿A cuántas libras equivale la masa anterior? ______

______

e) Si la tableta de chocolate que se muestra es de 5 oz, ¿cuál es la masa en gramos de cada cuadrito? Justifiquen su respuesta. ______

______

6. Respondan.

a) ¿Cuántas onzas son iguales a 250 g? ______

b) ¿Cómo pueden convertir de libras a gramos? ______

______

c) ¿Cómo pueden pasar de onzas a kg? ______

______

d) ¿Cuántos gramos equivalen a $3\frac{1}{2}$ lb? ______

e) ¿Cuántos kilogramos son iguales a 125 oz? ______

f) ¿Cuántas onzas son iguales a 5.4 kg? ______

equipos

7. Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros equipos. Si existen diferencias mínimas en los resultados, validen sus procedimientos con el profesor, ya que podrían ser diferentes, pero válidos, y por ello las diferencias en los resultados.

parejas

Para formalizar

8. Lee la siguiente información. Después, compárala con los resultados que obtuviste.

Las unidades del Sistema Inglés para medir la masa son: la libra (lb) y la onza (oz).

1 libra es igual a 0.453592 kg, pero se redondea a 0.454 kg.

1 onza es igual a 28.3495, que regularmente se redondea a 28.35 g.

1 libra es igual a 16 onzas.

Para convertir libras en kg, se multiplica la medida por 0.454:

$4 \text{ lb} = 0.454 \times 4 = 1.816 \text{ kg}$

Para convertir onzas en g, se multiplica la medida por 28.35:

$8\frac{1}{2} \text{ oz} = 8.5 \times 28.35 = 240.975$

Para pasar de kilogramos a libras y de gramos a onzas, se divide entre las medidas equivalentes:

$45 \text{ kg} = 45 \div 0.454 = 99.11 \text{ lb}$ $118 \text{ g} = 118 \div 28.35 = 4.26 \text{ oz}$

Ponlo en práctica

individual

9. Realiza las siguientes conversiones.

a) 2 lb = _______ oz = _______ g

b) 4 086 g = _______ kg = _______ lb

c) 3.8 lb = _______ kg

d) 1 g = _______ oz

e) 1 kg = _______ lb

f) 150 oz = _______ kg

10. La siguiente imagen muestra mancuernas para hacer ejercicio. El número indica la masa de cada una en libras (1 lb, 2 lb, etcétera).

a) ¿De qué color es la mancuerna de 2.7 kg, aproximadamente?

____

b) ¿Cuál tiene 4.5 kg? _______________________

c) ¿Cuántos gramos tiene la mancuerna verde? _______________

____

11. Resuelve.

Si un elevador indica que su capacidad máxima es de 1 600 lb, ¿cuántos kg puede soportar? _______________________

Unidades de capacidad del sistema inglés

Propósito Resolverás problemas que implican conversiones entre unidades de capacidad del SI y unidades del sistema inglés.

parejas

1. Resuelvan los siguientes problemas en parejas.

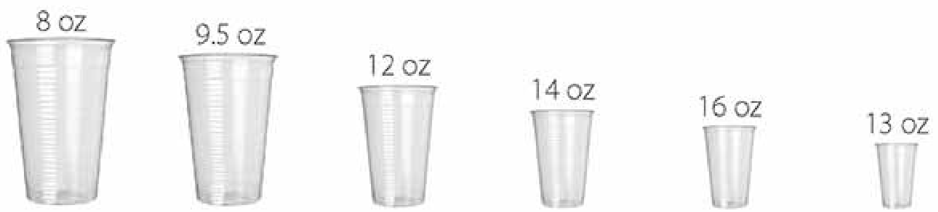
En la lección 9.1 resolviste un problema en el que Antonieta compró 4 jugos para una fiesta. La suma del contenido de las 4 botellas era 15.14 litros.

a) Si cada jugo era de 1 galón (gal), ¿cuántos litros son iguales a 1 gal? ______

b) También recordarán que los vasos tenían capacidad de 300 mL. Si el contenido de cada vaso es equivalente a 10.145 onzas líquidas (ft. oz), ¿cuántos mL son equivalentes a 1 ft. oz? Redondeen a 2 cifras decimales. ______

2. Seguramente, alguna vez has comprado vasos desechables y los has pedido por número, sin saber que dicho número representa su capacidad en onzas, como muestran las siguientes imágenes.

a) Anota la medida de los vasos en mililitros.



______ ______ ______ ______ ______ ______

b) Aproximadamente, ¿cuántas onzas debe medir un vaso de 1 L? ¿Cómo obtuvieron la medida? ______

3. Otra de las medidas de capacidad del Sistema Inglés es la pinta (pt).

a) Si una pinta es igual a 16 onzas, ¿cuál es su equivalente en mililitros? Redondeen al número entero más cercano. ______

b) ¿Cómo puedes pasar de litros a pintas? ______

c) ¿Cuántas pintas son equivalentes a 3.785 L? ______

4. Realiza las siguientes conversiones entre unidades de capacidad.

a) 2.5 gal = ______ L

b) 600 mL = ______ oz

c) 45 oz = ______ mL = ______ L

d) 5.8 L = ______ pt = ______ oz

5. Comparen sus conversiones con las de otros alumnos. Discutan las dificultades que tuvieron para identificar las equivalencias y cómo las resolvieron

parejas

Para formalizar

6. Lee la siguiente información. Después, compárala con los resultados que obtuviste en las actividades previas para validarlos.

Algunas de las unidades del Sistema Inglés que se usan para medir la capacidad son: el galón (gal), la pinta (pt) y la onza líquida (ft. oz).

1 galón es igual a 3.78541 L, pero se redondea a 3.785 L.

1 pinta es igual a 0.473176 L, pero regularmente se usa 0.473 L = 473 mL.

1 onza líquida es igual a 29.5735 mL, que por convenio se redondea a 29.57 mL.

1 gal = 8 pt = 128 fl. oz.

Al igual que las medidas de longitud y capacidad, para convertir las medidas del Sistema Inglés a medidas de SI se multiplica, y a la inversa, se divide:

4 gal = $3.785 \times 4 = 15.14$ L; 3.5 pt = $3.5 \times 0.473 = 1.6555$ L = 1 655.5 mL

24 ft oz = 709.68 mL = 0.70968 L

Ponlo en práctica

individual

7. Resuelve los siguientes problemas.

a) ¿Cuántos botes de un galón se pueden llenar con una cubeta de 28 litros de pintura? ¿Cuántos litros sobran? ____________________

____

b) Andrea tiene un bebé y para salir a la calle, lleno un termo de agua con 0.8 L para preparar sus mamilas. Si el bebé ingiere 4 fl. oz de leche en cada toma, ¿cuántas mamilas puede preparar con el agua del termo? ____________

c) En una gasolinería de Estados Unidos, René quiere cargar 40 litros, pero como allá venden la gasolina por galones, no sabe cuántos pedir. Aproximadamente, ¿cuántos galones con una cifra decimal debe pedir? ____________

d) Si una bomba despacha la gasolina a razón de 12 gal/min, ¿en cuánto tiempo despachará 25 litros? ____________________

____

8. Responde y resuelve las preguntas:

a) ¿Cuántos litros son equivalentes a 6 pintas y 9 onzas? ____________

b) ¿Cuántos galones y onzas hay en 7.63 L? ____________

c) ¿Cuántas pintas equivalen a 6 L y 455 mL? ____________

individual

1. Realiza las siguientes conversiones.

◀ Integramos

a) $2\frac{1}{2}$ mi = ______________ m = ______________ dam

b) 25 ft = ______________ cm = ______________ dm

c) 24 lb = ______________ kg = ______________ g

d) $3\frac{1}{4}$ oz = ______________ g = ______________ mg

e) 6 gal = ______________ L = ______________ hL

f) 6 fl. oz = ______________ mL = ______________ daL

2. Los datos de la siguiente tabla muestran información que apareció en una revista de Estados Unidos sobre la masa ideal de hombres, entre 25 y 59 años, de acuerdo con algunas estaturas. Escribe los datos en kilogramos y en metros.

Estatura en ft (') y in (")	"Masa" ideal (lb)	Estatura en (m)	"Masa" ideal (kg)
5' 1"	123 – 145		
5' 6"	133 – 163		
5' 10"	141 – 179		
6'	147 – 187		

3. Laura vio en una receta los ingredientes para preparar un pastel para 8 personas, en unidades del Sistema Inglés y necesita realizar las equivalencias porque quiere preparar el mismo pastel, pero para 12 personas.

Calculen los ingredientes para preparar un pastel para 12 personas.

Ingredientes	Para 8 personas	Para 12 personas
Harina	21 oz	kg
Leche	13.5 ft. oz	L
Chocolate en polvo	$5\frac{1}{2}$ oz	g
Polvo para hornear	$2\frac{3}{4}$ oz	g
Huevos	3 piezas	

4. Un automóvil americano tiene un rendimiento de 130 millas por galón de gasolina.

a) ¿Cuántos litros consume en un trayeto de 25 km? ______________

b) ¿Cuántas millas puede recorrer con 30 L de gasolina? ______________

Aprendizaje esperado:
Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Medidas de tendencia central y de dispersión

Media, mediana y moda

individual

Exploramos

1. Calcula la media, la moda y la mediana del siguiente conjunto de datos.

La siguiente lista muestra el número de carreras anotadas por una equipo de beisbol durante los partidos de una temporada.

2 4 3 6 10 14 6 9 5 5 7 16 9 12 14 10 5 8

12 0 9 6 3 3 11 13 1 8 16 9

Media: ___________ Moda: ___________ Mediana: ___________

a) ¿Cuál es el rango del conjunto de datos? ___________

b) ¿Qué medida consideras que es más representativa del rendimiento del equipo? Explica. ___________

c) ¿Qué tan regular o irregular consideras el rendimiento del equipo? ¿Cómo podrías determinarlo a partir de la media? ___________

____

2. Las siguientes listas muestran la temperatura promedio de dos ciudades durante los mismos días de marzo.

Día / Temperatura	Lun	Mar	Mier	Jue	Vie	Sab	Dom
(°C) Ciudad A	23	25	28	29	23	24	26
(°C) Ciudad B	26	22	24	25	30	22	20

a) ¿Cuál es la media, moda y mediana de la temperatura en ambas ciudades?

Ciudad A. Media: ___________ Mediana: ___________ Moda: ___________

Ciudad B. Media: ___________ Mediana: ___________ Moda: ___________

b) ¿Cuál es el rango en cada ciudad? ___________

c) ¿En qué ciudad la temperatura fue más constante? ¿Cómo lo determinaste?

____

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten acerca de la importancia de las medidas de tendencia central en el análisis de datos.

Dispersión de un conjunto de datos

Propósito Analizarás conjuntos de datos, sus medidas de tendencia central y el rango, y determinarás la dispersión de los mismos, a través de difentes recursos.

individual

1. Lee la información y resuelve las actividades.

◂ Transitamos

Durante un concurso de canastas, en una escuela, las competidoras tenían que lanzar el balón desde diferentes puntos de la cancha, como muestra la imagen. Lanzaban el balón 10 veces desde cada lugar, y cada canasta valía un punto. Los resultados de la final se muestran en la siguiente tabla.

Posición / Competidora	1	2	3	4	5	6	7	8
Luisa	2	9	10	6	6	3	10	10
Fernanda	6	8	9	8	6	6	7	9
Karina	4	9	7	9	7	3	8	9

a) ¿Cuál fue el lugar desde el que se anotaron más canastas? ____________

b) ¿Cuántos puntos obtuvo cada jugadora?

Luisa: ________ Fernanda: ________ Karina: ________

c) ¿Cuál es la media de cada jugadora?

Luisa: ________ Fernanda: ________ Karina: ________

d) ¿La moda y la mediana serán una buena opción para comparar el rendimiento de las jugadoras? ¿Por qué? ____________

e) Con los resultados anteriores, ¿podrían decretar a una ganadora? ¿Por qué? ____________

f) ¿Cuál es el rango de cada jugadora? ____________

g) Considerando el rango como refrencia, ¿cuál tuvo menor **dispersión**? ____________

El maestro necesita elegir a una de las competidoras para asistir a un concurso de canastas a otra escuela.

h) ¿A cuál de las jugadoras consideran que tiene que llevar el maestro? ¿Por qué? ____________

Glosario

Dispersión. En un conjunto de datos, indica que tan alejados están unos datos de otros considerando un valor como referencia.

pareja

2. Comenta tus resultados con otros compañeros. Discutan los criterios que se pueden seguir al comparar conjuntos de datos cuando tienen las misma media. ¿Cómo pueden determinar la dispersión de un conjunto de datos?

pareja

3. Lean la información y realicen lo que se pide.

Verónica hace gelatinas, como las que se muestran, las cuales distribuye en dos tiendas. Las siguientes listas muestran sus ventas en una semana:

Tienda	Número de gelatinas vendidas				
	Lun	Mar	Miér	Jue	Vie
1	9	12	15	15	9
2	11	13	15	9	12

a) ¿En qué tienda consideran que hubo mejores ventas? ______

b) Calculen la media, mediana y moda de las ventas en ambas tiendas.

Medida detendencia central / Tienda	Media	Mediana	Moda
Tienda 1			
Tienda 2			

Verónica tiene que decidirse y vender sus gelatinas sólo en una de las dos tiendas, porque ya no le conviene seguir vendiendo en ambas y quiere tomar la decisión a partir de las ventas que tuvo en cada una.

c) Alguna de las medidas anteriores, ¿le puede ayudar a Verónica a tomar la decisión más adecuada? ¿Por qué? ______

d) ¿Cuál es el rango en cada caso? ______

e) ¿Este valor le resulta útil a Verónica? ______

f) Si estuvieran en el caso de Verónica, ¿con cuál de las tiendas se quedarían? Expliquen el criterio que siguieron. ______

g) ¿En qué tienda los datos son más dispersos? ______

4. Discutan con las otras parejas el criterio que siguieron para responder el inciso f y comenten cómo podrían determinar la dispersión de cada conjunto de datos cuando tienen el mismo rango.

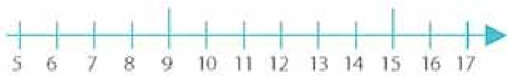
5. Resuelvan las siguientes actividades en equipo.

Carlos y Julio no se ponían de acuerdo sobre en cuál de las tiendas la venta de gelatinas era más dispersa.

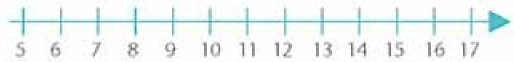
Carlos insistía en que tenían la misma dispersión, porque el rango era el mismo. Pero Julio le comentó que no, que dos conjuntos de datos pueden tener el mismo rango pero la dispersión puede ser diferente, y para demostrarlo representó las ventas por día en diferentes rectas numéricas.

a) Coloquen un punto en el lugar que corresponde a las ventas de la tienda 2.

Tienda 1



Tienda 2



b) Coloquen un punto en cada recta que represente la media de cada conjunto de datos y describan la separación o dispersión de cada dato respecto a la media, en cada caso.

____

c) ¿Coinciden con la postura de Julio? ¿Por qué? ______________________

6. Analicen la siguiente información y representen los valores en las rectas numéricas. Se abrieron 6 cajas con 100 piezas, cada una, de un mismo producto de dos diferentes marcas, y se tomó nota del número de piezas defectuosas de cada caja.

Número de caja / Marca	1	2	3	4	5	6
Marca A	5	8	4	3	7	9
Marca B	9	9	3	4	3	8

a) ¿Cuál es el rango de cada marca? ______________________

b) ¿Cuál de los conjuntos de datos es menos disperso? ______________________

c) Representen los valores de la tabla en dos rectas numéricas, con la misma escala, para validar su respuesta.

d) Calculen la media de cada conjunto de datos: ______________________

A la distancia de cada valor del conjunto de datos a la media se le llama **desviación**.

e) Anoten la desviación de cada valor a la media. Recuerden que las distancias se expresan con números positivos.

Marca A: ______________________ Marca B: ______________________

f) ¿En qué caso la suma de las distancias es mayor? ¿Qué relación tiene lo anterior con la dispersión de los datos? ______________________

grupo

7. ¿Qué relación hay entre la dispersión de un conjunto de datos y la media? Discutan en grupo lo anterior, validen su postura en las actividades previas y registren sus acuerdos en su cuaderno, con el aval del profesor.

Para formalizar

pareja

8. Lean la información. Después, revisen sus resultados y conclusiones para validarlos. Si tienen dudas, busquen el apoyo del profesor para aclararlas.

Las **medidas de dispersión** son parámetros que indican cómo se alejan los datos de la media y se usan como indicador de su variabilidad.
Una de las medidas de dispersión es el **rango**, que indica la dispersión entre los valores extremos de una variable y se calcula como la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable. Se denota como R.
Para datos ordenados se calcula como: $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, donde: $x_{(n)}$ es el valor o dato mayor y $x_{(1)}$, es el menor valor.
Al comparar dos conjuntos de datos, una forma de saber cuál tiene mayor dispersión es calculando la suma de los valores absolutos de la diferencia de cada dato respecto a la media, es decir, la suma de las desviaciones. Por ejemplo.
Conjunto 1: 3, 7, 8, 8, 9 Media: 7
Suma de las desviaciones con la media: $4 + 0 + 1 + 1 + 2 = 8$
Conjunto 2: 6, 7, 8, 9, 10 Media 8
Suma de diferencias con la media: $2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6$

Así podemos ver que el conjunto de datos 1 tiene mayor dispersión.

pareja

9. Santiago cursa segundo de secundaria y la tabla muestra sus calificaciones en los dos primeros periodos del ciclo escolar.

MATERIA	Periodo 1	Periodo 2
Español II	6	8
Tienda 2	9	10
Matemáticas II	6	8
Física	7	6
Tecnología II	10	7
Historia I	10	6
Formación Cívica y Ética I	9	7
Tutoría	7	7
Educación Física I	6	8
Artes II	7	9

a) Calcula el rango en cada periodo. ____________________

b) Cuál fue su promedio en cada periodo? ____________________

c) Calcula la suma de las distancias a la media en cada periodo:

Periodo 1: ____________________

Periodo 2: ____________________

d) ¿En qué periodo Santiago tuvo un rendimiento más constante? Explica. ________
____

Desviación media

Propósito Analizarás conjuntos de datos y calcularás la desviación media de uno para tomar decisiones respecto a la información que representa.

pareja

1. Lean la información y realicen lo que se pide.

El profesor de Educación Física pidió a los alumnos de diferentes grupos que midieran el largo de la cancha de voleibol de la escuela, mediante diferentes procedimientos informales.

Los alumnos de 2º A midieron la cancha con pasos, después calcularon la medida de cada uno y multiplicaron el resultado por el número de pasos. Las medidas que obtuvieron fueron las siguientes:

16 m, 17 m, 21 m, 18 m, 16 m, 20 m, 19 m, 21 m

a) ¿Cuál es la media de las medidas? ______

b) Calculen la suma de las desviaciones de cada medida a la media: ______

c) ¿Cuál es la media de las desviaciones? ______

2. Los alumnos de 2º B utilizaron un método basado en proporcionalidad, a partir de la sombra que reflejaba un árbol sobre la cancha. Las medidas que obtuvieron son las siguientes:

16 m, 17 m, 21 m, 18 m, 17 m, 19 m, 19 m, 17 m

a) ¿Cuál es la media de las medidas? ______

b) Calculen la suma de las desviaciones de cada medida a la media: ______

c) ¿Cuál es la media las desviaciones? ______

3. Analicen los resultados y respondan.

a) ¿Consideran que la media es una buena representación de las medidas, en cada caso? Expliquen por qué. ______

b) A partir únicamente de la media de los datos, ¿se puede determinar que mediciones fueron más precisas? ¿Por qué? ______

c) Si alguien piensa que la media de las desviaciones (inciso c en ambos casos) permite saber qué método fue más preciso, ¿qué le dirían? ¿Por qué? ______

d) ¿Cuál de los métodos permitió obtener mediciones más precisas? ______

______

equipo

4. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan lo siguiente: ¿Qué importancia tienen las medidas de dispersión en este caso? ¿Qué importancia cobra la media de las distancias en estos casos? Busquen llegar a acuerdos y compártanlos con otros compañeros.

individual

Para formalizar

5. Lee la siguiente información. Si tienes dudas, busca el apoyo de tus compañeros. Regresen a la actividad anterior y validen sus respuestas.

Otra de las medidas de dispersión es la **desviación media**, que es igual a la media de la suma de las distancias o valores absolutos de la diferencia de cada valor a la media del conjunto de datos.

En la lección anterior, calculaste la suma de las diferencias. La desviación media representa la medida de dicha suma:

Conjunto 1: 3, 7, 8, 8, 9 Media: 7

Suma de diferencias con la media: $4 + 0 + 1 + 1 + 2 = 8$

Desviación media: $\frac{(4 + 0 + 1 + 1 + 2)}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$

Conjunto 2: 6, 7, 8, 9, 10 Media 8

Suma de diferencias con la media: $2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6$

Desviación media: $\frac{(2 + 1 + 0 + 1 + 2)}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$

Así podemos ver que la desviación media es menor en el segundo conjunto. Entre menor desviación media, menor dispersión del conjunto de datos.

En el caso de medidas, como en la actividad anterior, al comparar la desviación media, podemos saber qué conjunto de medidas fue más precisos.

individual

6. Analiza la información de las tablas, que muestran la masa de los alumnos de dos grupos de segundo de secundaria.

2° A Masa (kg)	46	44	48	44	47	50	55	51	45	50	53	51	55	49	50	43
2° B Masa (kg)	45	55	43	45	55	47	46	54	53	44	52	53	48	46		

a) ¿Cuál es la masa promedio de 2º A? ____________________

b) ¿Cuál es la masa promedio de los alumnos de 2° B? ____________________

c) ¿Cuál es la suma de la distancia de cada dato a la media? ____________________

d) Calcula la desviación media de cada conjunto de datos.

Desviación media de 2º A: ______________ Desviación media 2º B: ______________

e) ¿En qué grupo la masa de los estudiantes es menos dispersa? ______________

pareja

7. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema:

Ana está llenando bolsas con chocolates, de cierta masa, pero debido al tamaño de las piezas, no logra que todas las bolsas tengan la misma medida. La masa de las bolsas que llenó es:

245 g, 262 g, 255 g, 240 g, 235 g, 248 g, 270 g, 265 g

a) ¿De cuántos gramos es la media de las bolsas? ______

b) ¿Cuál es el rango, en gramos, de la masa de las bolsas? ______

c) ¿Cuál es la desviación media? ______

d) ¿Qué tan dispersos consideran los datos? ______

e) De acuerdo con la media y la desviación media, ¿consideran que la masa de las bolsas es adecuada? Expliquen. ______

______

equipo

8. Comparen sus argumentos con los de otros compañeros. Comenten la importancia de la desviación media en situaciones como la anterior.

pareja

9. Retomen el trabajo en parejas para resolver el siguiente problema.

Javier es el encargado de revisar que las máquinas despachadoras de bebidas de una cadena de cines funcionen correctamente. Cada cierto tiempo realiza pruebas para verificar que cumplan con un control de calidad. La norma de la empresa indica que al servir 10 bebidas, la desviación media de cada despachador no debe rebasar los 12 mL.

Máquina despachadora de refrescos.

La siguiente lista muestra la cantidad de bebida que sirvieron tres despachadores, en mililitros:

Despachador 1: 345, 352, 329, 340, 347, 335, 325, 360, 355, 342
Despachador 2: 362, 326, 315, 344, 350, 365, 329, 340, 375, 354
Despachador 3: 330, 352, 359, 365, 344, 365, 335, 342, 350, 348

a) Calculen la media de cada máquina. ______

______

b) Calculen la desviación media de cada máquina. ______

______

c) ¿Cuál o cuáles de los despachadores no cumplen con la norma de la empresa?

______

Ponlo en práctica

individual

10. Calcula la desviación media de cada conjunto de datos y determina cuál es más disperso.

a) Conjunto 1: 3, 5, 6, 9, 12 | Conjunto 2: 4, 6, 9, 12, 15

Media: ______________ | Media: ______________

Desviación media: ______________ | Desviación media: ______________

En el conjunto ______________ los valores son más dispersos.

b) Equipo A: 24, 16, 21, 28, 25 | Equipo B: 28, 16, 18, 26, 23

Media: ______________ | Media: ______________

Desviación media: ______________ | Desviación media: ______________

En el conjunto ______________ los valores son más dispersos.

11. Resuelve los siguientes problemas.

La siguiente lista muestra la estimación que hizo un grupo de estudiantes de la altura de un edificio, aplicando diferentes criterios matemáticos.

Equipo	Altura (m)
1	56.8
2	60.4
3	59.8
4	72.2
5	63.1

a) ¿Cuál es la media del conjunto de medidas? ______________

b) ¿Cuál es la desviación media de los datos? ______________

c) ¿Qué tan dispersos o lejos de la medida real estuvieron los datos? ______________

____

d) De acuerdo con la desviación media, ¿consideras que la media es un buen parámetro de la altura del edificio? ______________

____

Consulta en...

Ingresa a: https://www.vitutor.com/estadistica/descriptiva/a_14_e.html y resuelve los problemas que ahí se ofrecen para practicar la desviación media de un conjunto de datos.

equipo

12. Comparen sus respuestas y argumentos con los de algunos de sus compañeros. Si no coinciden, discutan sus argumentos con el apoyo del profesor, en busca de llegar a un acuerdo.

individual

1. Resuelve el siguiente problema.

La tabla muestra el número de productos vendidos por tres tiendas de una misma cadena durante 8 días consecutivos:

Tienda	Número de productos								Rango	Media	Desviación media
1	20	20	25	30	25	45	25	20			
2	18	40	40	45	45	30	35	35			
3	35	40	20	35	25	30	20	45			

a) ¿Es correcto pensar que a mayor media o mayor rango, mayor dispersión? ____

b) ¿En qué tienda las ventas fueron más consistentes? ____

c) ¿Cuál es la media de todas las tiendas? ____

d) ¿Cuál es la desviación media? ____

2. En una hoja electrónica de cálculo puedes calcular la media y la desviación media de un conjunto de datos.

a) Ingresa una serie de 12 valores numéricos de la celda A1 a la celda A12 (aunque puedes elegir otras celdas).

b) Para calcular el promedio o media, en la celda B1 ingresa la fórmula: =PROMEDIO(A1:A12) o las celdas que hayas elegido y da enter.

c) Después, para la desviación media, en la celda B2 escribe la fórmula: =DESVPROM(A1:A12) y presiona enter.

d) Calcula los resultados de forma manual y valida lo que obtuviste antes.

e) ¿Coinciden? ¿Qué ventajas tiene el uso de la hoja electrónica?

3. Resuelve algunas de las actividades de la lección en una hoja electrónica para validar tus resultados,
Se hizo una prueba a un automóvil de carreras. Se tomó el tiempo que tardaba en dar vueltas a un circuito y se obtuvieron los siguientes valores, en segundos:

48.5	47.3	45.2	52.9	51.5	49	20	45	46.3	50.3	48.8	52.4	47.8	46	49.3	50.2	45.8

Los constructores del automóvil consideran que una desviación media de 2.2 segundos representa un buen parámetro de su rendimiento.

a) ¿El automóvil cumple con lo que esperan los constructores? ¿Por qué? ____

____

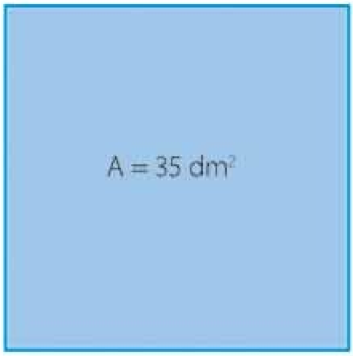
b) ¿Cuál es la media de los tiempos? ____

Hasta
DÓNDE LLEGUÉ

1. ¿Cuál de los siguientes números no es un cuadrado perfecto?

a) 144 b)225 c) 111 d) 169

2. Calculen la medida de lados del siguiente cuadrado. Aproxima a dos cifras decimales.



Lados : ____________________

3. Responde.

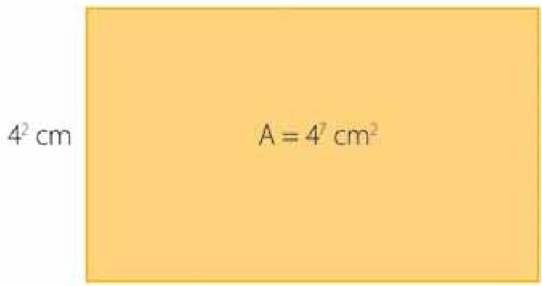
a) ¿Cuál es el resultado de multiplicar dos potencias de la misma base? ____________________

____

b) ¿Cuál es el resultado de dividir dos potencias de la misma base? ____________________

____

4. Anota la medida que se pide en cada figura.



Área : ____________________ Base : ____________________

5. Responde.

a) El diámetro de un microbio es igual a 0.0000081 m. ¿Cuál es su medida en notación científica?

____

b) Si el diámetro del Sol es igual a 1.391×10^9 m, ¿qué número natural le corresponde? ____________________

____

6. Lee la información y elige la respuesta correcta en cada caso.

Un barco pesquero sale a la mar con 12 tripulantes y llevan alimentos y víveres para navegar durante 28 días.

a) Si en lugar de 12, viajaran 8 tripulantes, ¿para cuántos días les alcanzaría la comida?

42 días   18 días   36 días   40 días

b) Si la misma cantidad de alimento alcanza para 21 días, ¿cuántos tripulantes viajarían en el barco?

9 tripulantes   18 tripulantes   16 tripulantes   20 tripulantes

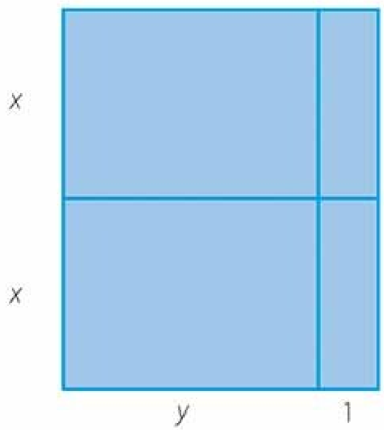
c) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ____________________

7. Resuelve.

Luis, Leonel y Karen son meseros y se reparten las propinas de cada día de acuerdo con el número de mesas que cada uno atendió. Luis atendió 5 mesas; Karen, 7 mesas y Leonel, 8 mesas. Si recibieron $940 en propinas, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

Karen: __________   Luis: __________   Leonel: __________

8. Escribe el perímetro de la siguiente figura de dos maneras diferentes.



P: __________ = __________

9. ¿De qué otra forma se puede representar el área de un rectángulo que mide $5x + 15$?

____

10. Resuelve.

a) Una alberca mide 9.5 m de largo, 360 cm de largo y 17 dm de alto. ¿Cuál es su volumen? ______

____

b) ¿Cuál es su capacidad en litros? ____________________

11. ¿Cuántos kilogramos tiene una mancuerna para hacer ejercicio de 3 libras?

a) 2.34 kg b) 1.362 kg c) 6.6 kg d) 1.832 kg

12. ¿Cuántos botes de 1 galón se pueden llenar con una cubeta de 24 L de pintura?

a) 7.3 botes b) 5.8 botes c) 6.3 botes d) 7 botes

13. Según el libro de los Récords Guinnness el hombre más alto de la historia midió 8 ft y 11 in con una masa de 484 lb.

a) ¿Cuál fue su estatura en metros? ______

b) ¿Cuál fue su masa en kilogramos? ______

14. Resuelve.

Alfonso compró un automóvil americano usado. El automóvil tenía12 450 millas de recorrido. ¿Cuántos kilómetros tiene recorridos? ______

15. Calcula la media, el rango y la desviación media del siguiente conjunto de datos que muestra la medición que hicieron algunos estudiantes sobre la altura del asta bandera de su escuela. Las medidas están dadas en metros:

2.4 2.5 2.6 2.15 2.55 2.35

Media: ______ Rango: ______ Desviación media: ______

16. La siguiente tabla muestra los hits anotados por dos diferentes equipos durante 8 juegos consecutivos. Un hit es cuando un bateador golpea la pelota y esta cae dentro del campo de juego, permitiendo que el jugador llegue a la primera base.

Juego / Equipos	1	2	3	4	5	6	7	8
Cachorros (hits)	4	6	1	8	7	8	6	6
Cardenales (hits)	6	8	9	8	6	7	7	9

a) ¿Cuál es la desviación media de cada equipo? ______

b) ¿Qué equipo fue más consistente en el número de hits por partidos? ______

Autoevaluación

Lee los siguientes enunciados y utiliza los parámetros para evaluar el logro de tus aprendizajes durante el bloque. Anota en la columna de la derecha el número que corresponda a tu desempeño.

1 = Insuficiente	2 = Bajo	3 = Me cuesta trabajo	4 = Lo logré

Indicadores	Desempeño
Calculo la raíz cuadrada de cuadrados perfectos y realizo aproximaciones a la raíz de números que no son cuadrados perfectos.	
Resuelvo problemas de potencias: producto de potencias, cociente de potencias y potencias de potencias.	
Represento cantidades muy grandes o muy pequeñas en notación científica.	
Resuelvo problemas de proporcionalidad inversa, y determino la expresión algebraica que les corresponde.	
Resuelvo problemas de reparto proporcional.	
Realizo conversiones entre múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo y realizo conversiones entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y del Sistema Inglés.	
Cálculo las medida de tendencia central: media, moda y mediana de un conjunto de datos y determino su rango y desviación media.	

Describe lo que consideras que tienes que hacer para mejorar tu desempeño en el siguiente bloque.

Entrega tu autoevaluación a tu profesor y pídele que te haga comentarios al respecto.

Bloque 3

Secuencias:

11. Sistemas de ecuaciones lineales 2×2
12. Gráficas de proporcionalidad inversa
13. Área de polígonos regulares y del círculo
14. Volumen de prismas y cilindros
15. Probabilidad teórica

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
- Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.
- Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Las norias o ruedas de la fortuna (llamadas así, hablando literariamente, *porque no sabes donde vas a quedar igual que la fortuna, no sabes con quien se queda o quien se la gana*) La primera noria fue hecha en la ciudad de Chicago, en Estados Unidos para la Exposición Universal en 1893, la cual tenía una altura de 75 m. En la ciudad de Puebla se encuentra la noria más grande de América Latina, como 80 m de alto.

Reflexiona y responde:

- ¿Cómo puedes determinar la medida de los lados de un rectángulo cuya área mide 36 cm^2?
- ¿Qué características tendrá la gráfica de una relación de proporcionalidad inversa?
- ¿Cómo puedes determinar el área que ocupa la rueda de la fortuna?
- ¿Qué relación hay entre la capacidad y el volumen de un cilindro de agua?
- En la rueda de la fortuna de la imagen, si viajas en ella, ¿cómo puedes conocer la probabilidad de quedar hasta abajo cuando se detenga?

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Futbol americano

Exploramos

individual

1. Resuelve los siguientes problemas.

Un jugador de futbol americano ganó 185 yardas durante un partido, mediante corridas (por tierra) y recibiendo pases (por aire).

a) Si tuvo 8 corridas por tierra, con un promedio de 5.5 yardas por corrida, escribe una ecuación que permita saber cuántas yardas obtuvo por aire. ______

b) ¿Cuántas yardas ganó por aire? ______

En el futbol americano un "gol de campo" vale 3 puntos y una "anotación" vale 7 puntos (considerando un punto extra que se otorga al meter un gol de campo después de anotar).

c) Un equipo anota 47 puntos en total, si anotó 4 goles de campo, ¿cuántas anotaciones obtuvo, considerando que en todas obtuvo el punto extra? Representa algebraicamente el problema. ______

d) ¿Cuántas anotaciones obtuvo el equipo? ______

2. Para hacer un letrero, Carmela cortó una cartulina de forma rectangular, cuya largo mide 10 cm más que el ancho y tiene un área de 875 cm^2.

a) ¿La cartulina puede medir 30 cm de largo? ¿Por qué? ______

______

b) Anota las posibles medidas de ancho, de acuerdo con la medida del largo que se muestra, de manera que cumplan con la condición del problema.

Largo (cm)	35	40	50	55	60
Ancho (cm)					

c) ¿Qué pareja de medidas del rectángulo que cumplen con el área de 875 cm^2?

______

Representa algebraicamente el problema: ______

3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenten si habrá otra manera de representar y resolver el problema de Carmela.

Sistemas de ecuaciones 2 × 2 por método gráfico

Propósito Representarás algebraicamente sistemas de ecuaciones 2 × 2 y los resolverás por medio de procedimientos informales, tablas y gráficamente.

◂ Transitamos

pareja

1. Analicen la información y realicen lo que se pide.

Néstor colecciona dos álbumes, uno de futbol y el otro de súper héroes. Guardó en un sobre 18 estampas repetidas de ambos.

a) Si las estampas de súper héroes son 4 más que las de futbol, ¿cuántas estampas tiene de cada una? ______

b) ¿Qué hicieron para responder? ______

2. Consideren que tiene 39 estampas y que hay 11 más de futbol.

a) Si restan las 11 que tiene de más de futbol, ¿cuántas estampas quedan? ______

b) De esas estampas cuántas son de súper héroes y cuántas de futbol? Expliquen su repuesta. ______

c) ¿Cuántas estampas son de futbol y cuántas de súper héroes? ______

3. Néstor compró 5 sobres de estampas de futbol y 3 de súper héroes. Si pagó \$45 y los sobres de futbol cuestan un peso más que los otros, ¿cuánto cuesta cada tipo de sobre? ______

a) ¿Podrían resolver el problema siguiendo el procedimiento anterior? Justifiquen su respuesta. ______

b) Completen la siguiente tabla, que muestra diferentes precios para los sobres y lo que se tendría que pagar en cada caso. Determinen el precio de los sobres.

Precio de sobres de futbol (\$)	Precio de sobres de súper héroes (\$)	Total por pagar (\$)
4		4(5) + 3(3) = 29
6		
7		

c) ¿Cuál es el precio de cada tipo de sobre? ______

grupo

4. Comparen sus resultados. Comenten las estrategias propuestas, analicen si siguieron el mismo camino y si llegaron al mismo resultado. Comenten si es posible resolver los problemas algebraicamente y que estrategia usarían para ello.

equipo

5. En parejas, analicen las siguientes situaciones y resuélvanlas.

Guillermo tiene 23 monedas, en las que hay de \$5 y de \$2. Si en total tiene \$73, ¿cuántas monedas tiene de cada denominación?

a) ¿Es posible que el número de monedas de \$5 sea 12? Explica tu respuesta.

____

____

b) Si tuviera 10 monedas de \$2, ¿cuántas serían de \$5? ______________

¿Esta suma corresponde al dinero que tiene Guillermo? ______________

____

c) Completen la siguiente tabla.

Monedas de \$2	9	10	11	12	13	14	15	16
Monedas de \$5								
Total de monedas	23	23	23	23	23	23	23	23
Total de dinero								

d) ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene Guillermo? ______________

e) Discutan en parejas si existe una manera más rápida de obtener la respuesta. Registren su opinión ______________

6. Consideren que *x* representa las monedas de \$2 y *y* las de \$5. Realicen lo que se pide.

a) Completen la expresión algebraica representa el total de monedas de Guillermo:

________ + ________ = 23

b) Escriban una expresión algebraica que represente el dinero que tiene Guillermo en función de *x* y *y*: ________ + ________ = 73

c) Sustituyan a *x* y a *y* en ambas expresiones por los valores que encontraron en el inciso d.

Total de monedas: ______________ Total de dinero: ______________

d) ¿Qué observan? ______________

grupo

7. Comparen sus respuestas y sus procedimientos con los de sus compañeros. Discutan cómo se puede resolver un problema que involucre dos ecuaciones con dos incógnitas, como el caso anterior. Registren sus acuerdos.

equipo

8. En equipos, realicen lo que se pide para resolver las siguientes actividades.

Néstor realiza con su primo un juego cuyas "acciones" otorgan 3 y 4 puntos, dependiendo el grado de dificultad.

Durante una ronda, Néstor realizó "20 acciones" por las que obtuvo 72 puntos. ¿Cuántas acciones de 3 y de 4 puntos hizo?

a) Escriban una expresión algebraica que represente la suma de las acciones y otra que represente los puntos que sumó. Consideren las acciones de 3 puntos como x y las de 4 puntos, como y.

Suma de las acciones: ______________ Puntos acumulados: ______________

b) Completen las siguientes tablas, asignando valores al número de acciones de 4 puntos, según las acciones de 3 puntos que se muestran, a partir de las expresiones algebraicas anteriores.

Tabla de la suma de las acciones:

Acciones de 3 puntos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14	16
Acciones de 4 puntos	19													

Tabla de puntos acumulados. Consideren el número de acciones que se necesitan para sumar los 72 lados. Por ejemplo; 72 - 2(3) = 66; 66 entre 4 = 16.5.

Acciones de 3 puntos	2	4	6	8	10	12	14	16
Acciones de 4 puntos	16.5							

Otra vista

A los valores correspondientes a las acciones del juego, se les conoce como variables indiscretas, porque no pueden adquirir valores decimales. Por ello, las rectas solo modelan la situación.

c) ¿Por qué no se pueden considerar los números decimales en el contexto de problema? ______________________________

9. Representen en el plano puntos para cada pareja de valores enteros de cada tabla, y únanlos para formar las rectas que modelan el problema.

a) ¿En qué punto se cortan las dos rectas? ______________

b) ¿Qué relación tiene este valor con la solución del problema? ______________

____

c) Sustituyan en sus ecuaciones a x y y por los valores anteriores y validen que se cumple la igualdad.

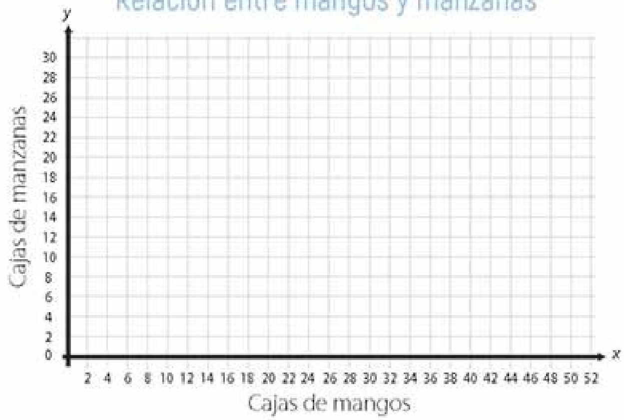
10. Consideren la siguiente situación y resuelvan.
Alfonso tiene una bodega de frutas y tiene que entregar 49 cajas de frutas entre mangos y manzanas. Si las cajas de manzanas superan en 9 a las de mangos, ¿cuántas cajas tiene que entregar de cada fruta?

a) Escriban dos ecuaciones que representen la situación, una para la suma de las cajas de mangos (x) y de manzanas (y) y otra que represente la diferencia del número de cajas.

Suma de las cajas: __________ Diferencia del número de cajas: __________

b) Asignen diferentes valores a x, en ambos casos, y calculen los valores correspondientes a y. Ubiquen los puntos en el siguiente plano y tracen las rectas correspondiente.

Relación entre mangos y manzanas



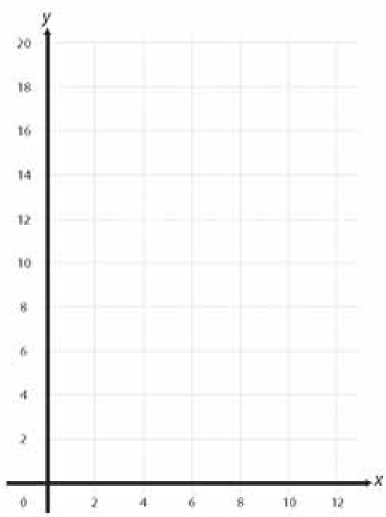
c) ¿En qué punto se intersecan las rectas? ¿Qué representa dicho punto en el contexto del problema? ____________________

d) ¿Cuántas cajas tiene que entregar de cada fruta? ____________________

____

11. Escriban las ecuaciones que representen la siguiente situación y resuelvan el problema mediante las gráficas correspondientes.

El triple de un número más el doble de otro es igual a 34. Si el doble del primero menos el segundo es igual a 4, ¿de qué número se trata?



a) Ecuaciones: ____________________

$x =$ __________ $y =$ __________

b) Sustituyan x y y en ambas ecuaciones para validar que la igualdad se cumple en ambos casos.

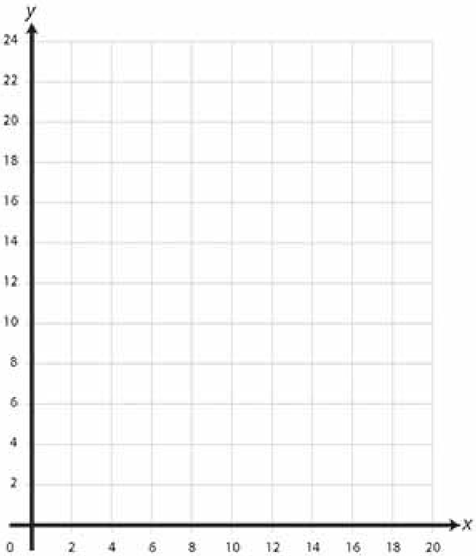
grupo

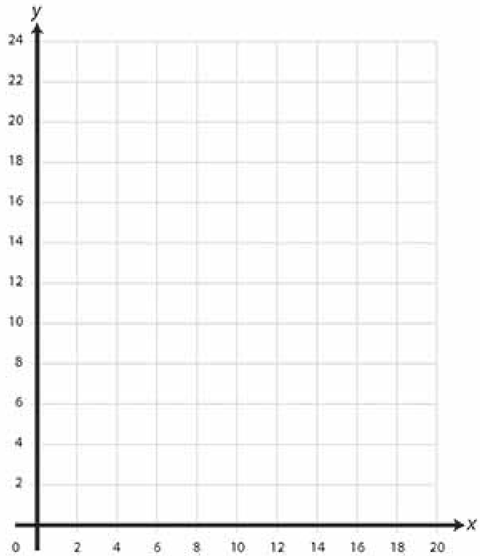
12. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. ¿Cuál es el procedimiento que permite resolver problemas que involucran dos ecuaciones con dos incógnitas gráficamente? Discutan lo anterior y registren su procedimiento en sus cuadernos.

13. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones. Construyan en tu cuaderno las tablas que corresponden a cada pareja de ecuaciones, después, tracen las rectas correspondientes.

$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ ______________________

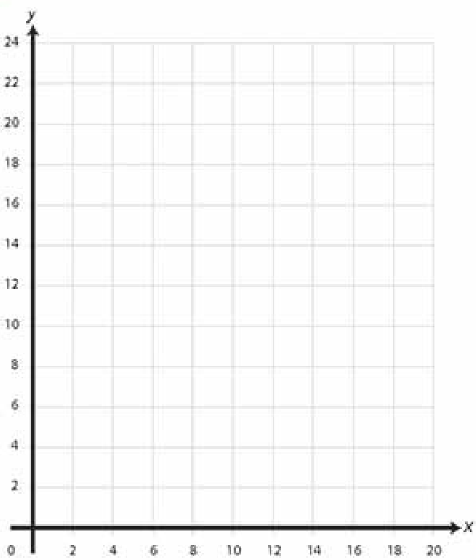
$\begin{cases} 3x - 2y = 34 \\ 6x - 4y = 17 \end{cases}$ ______________________

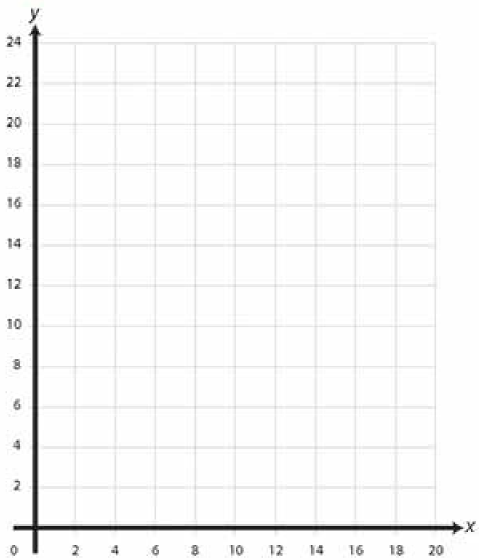




$\begin{cases} 3x + y = 18 \\ 6x + 2y = 36 \end{cases}$ ______________________

$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$ ______________________





a) ¿Qué características tienen las parejas de rectas? ______________________

b) Si la solución de un sistema de ecuaciones es el punto donde se intersecan las rectas, ¿qué puedes decir de las rectas que no se cortan y de las que están una sobre la otra? ______________________

c) ¿Cuál es la solución de cada sistema? Argumenten sus respuestas.

____

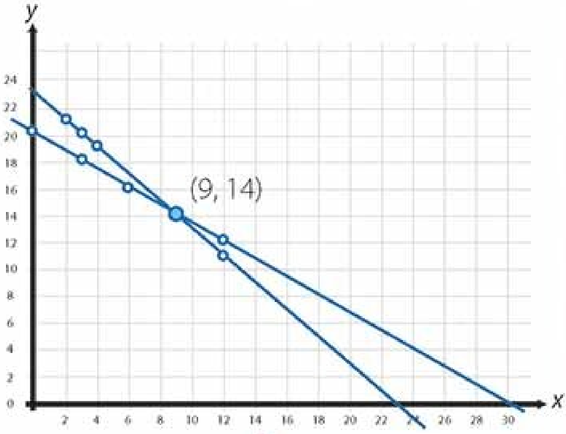
14. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Comenten cómo resolver gráficamente un sistema de ecuaciones y el número de soluciones, según la posición de las rectas. Validen su postura con el apoyo del profesor.

Para formalizar

individual

15. Lee la siguiente información para validar los acuerdos de grupo. Si tienes dudas, extérnalas a tu profesor para que te ayude a aclararlas.

Se llaman sistemas de ecuaciones 2×2 aquellas situaciones que involucran dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma: $ax + by = c$ y $dx + ey = f$, donde los valores de las incógnitas deben satisfacer a ambas igualdades. Por ejemplo:



La suma de dos números es igual a 23 y el doble del primero más el triple del segundo es igual a 60. El sistema de ecuaciones que representa la situación es el siguiente. Generalmente se usa una llave para identificar que se trata de un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 23 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases}$$

Existen diferentes métodos para resolver un sistema de ecuaciones, uno de ellos es gráficamente, como se muestra:

Primero se identifican valores para x y y que hagan verdadera cada igualdad.

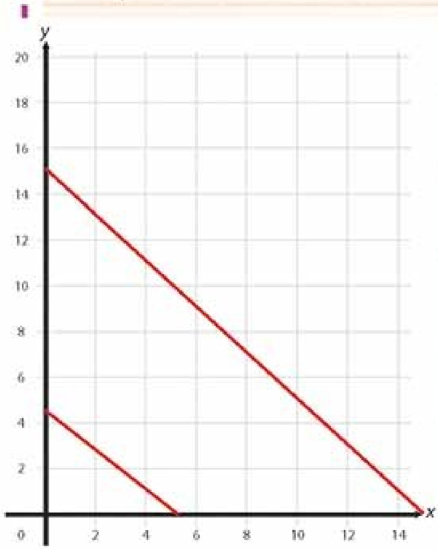
En la primera ecuación se ubican los puntos: (1, 22), (2, 21), (3, 20) y en la segunda: (0, 20), (3,18) y (6, 16). Todos hacen verdaderas las igualdades.
Después, se traza las rectas que unen los puntos correspondientes. El punto donde se cortan las rectas representa la solución del sistema, en este caso es (9, 14). Para comprobar la respuesta se sustituyen las incógnitas por sus valores númericos:

$x + y = 23; 9 + 14 = 23$ $\qquad$ $2x + 3y = 60$: $2(9) + 3(14) = 18 + 42 = 60$

Un sistema de ecuaciones 2×2 puede tener una solución, cuando las rectas se cortan en un punto, como en el caso anterior. Pero cuando las rectas no se cortan, el sistema no tienen soluciones y cuando las rectas coinciden en todos sus puntos el sistema tienen infinitas soluciones, como los siguientes casos:

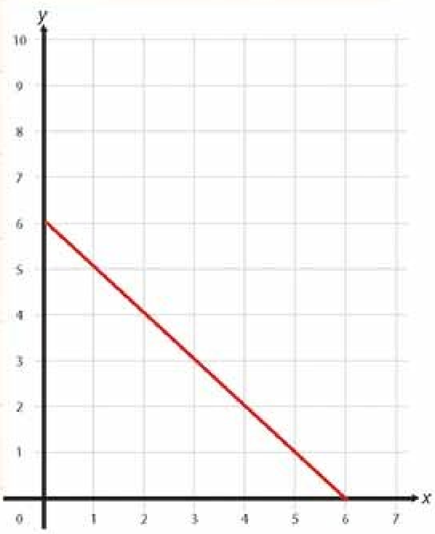
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 30 \end{cases}$$

No tiene soluciones



$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 3y = 18 \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones



individual

16. Resuelve los siguientes problemas.

a) La suma de la edad de María y su papá es de 69 años: Si la diferencia de sus edades es de 27 años, ¿cuántos años tienen cada uno? Anoten en la tabla la edad posible de María de manera que representen la suma de las edades.

Edad del papá	36	38	40	42	44	46	48	50	52
Edad de María									

b) ¿Para qué edades de la tabla la diferencia del problema se cumple? ____________

____

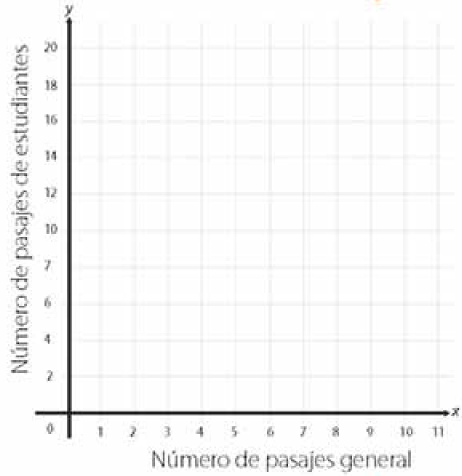
17. Escribe el sistema de ecuaciones que representa el problema y resuélvelo gráficamente. Simplifica las ecuaciones, cuando sea posible.

A camioneta de pasajeros se subieron 9 personas en la base. El precio del pasaje "general" es de \$8 y los estudiantes pagan la mitad, es decir \$4. Si se recaudaron \$48 en ese momento, ¿cuántos estudiantes se subieron a la camioneta?

Sistema de ecuaciones:

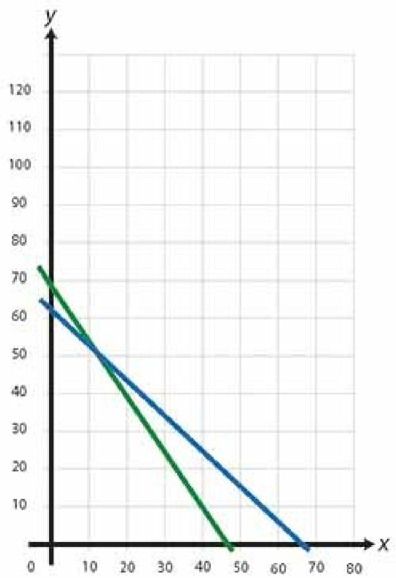
____

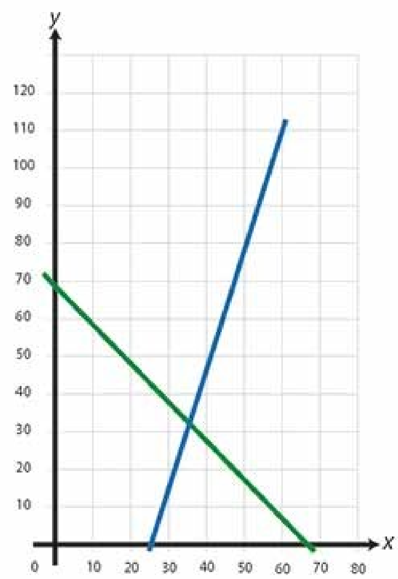
¿Cuántos estudiantes se subieron a la camioneta? ____________

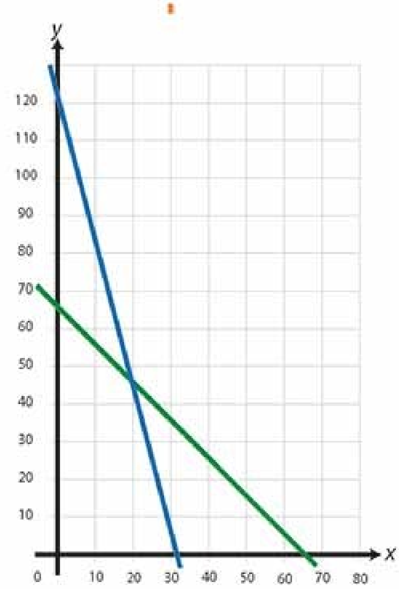


18. Selecciona la gráfica que representa la solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$x + y = 65; 4x + y = 125$







Ponlo en práctica

Consulta en...

Ingresa a:
https://bit.ly/2MkpgOE
y observa el video sobre cómo resolver un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico. Después:
https://bit.ly/2MprQm3
y resuelve los sistemas gráficamente.

Método de igualación

Propósito Resolverás sistemas de ecuaciones 2×2 por medio del método de igualación.

pareja

Otra vista

Recuerden que cuando dos cosas son iguales entre sí, ambas son iguales a una tercera. Por ejemplo, $x = 5 + 2$; $x = 3 + 4$, por tanto; $5 + 2 = 3 + 4$.

1. La maestra de Julio les planteó el siguiente problema: Jesús pagó por 2 chocolates y 4 paletas \$22. Si los chocolates cuestan 5 pesos más que las paletas, ¿cuál es el precio de cada producto? Analicen el sistema de ecuaciones que planteó Julio y la forma en que los resolvió.

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ x - y = 5 \end{cases}$

a) Simplifico la primera ecuación dividiendo todos los miembros entre 2. ¿Qué ecuación resulta? ¿Por qué la ecuación resultante es equivalente a la original?

____

b) Despejo x en ambas ecuaciones. Escriban la segunda ecuación y la simplificación anterior con x despejada: $\begin{cases} x = \_\_\_\_\_ \\ x = \_\_\_\_\_ \end{cases}$

c) Escribo una ecuación de una sola incógnita en función de y. Escriban la ecuación para igualar y a partir del despeje de x: ________ = ________

d) Resuelvo la ecuación para obtener el valor de y. ¿Cuánto vale y? Describan como obtuvieron la respuesta. ______________________________

e) Finalmente sustituyo y por su valor numérico en cualquiera de las ecuaciones para resolver x. ¿Cuánto vale x? ______________________________

f) Sustituyan x y y en ambas ecuaciones para validar que la solución sea correcta.

2. Resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones por medio de método anterior.

$$\begin{cases} 2x + y = 50 \\ 3x + 2y = 88 \end{cases}$$

a) Paso 1: Simplifico una ecuación: ______________________________

b) Despejo una de las incógnitas en ambas ecuaciones: ______________________________

c) Escribo una ecuación con una sola incógnita y la resuelvo: ______________________________

d) Sustituyo la incógnita anterior en ambas ecuaciones para resolver la otra: ______

____

e) ¿Cuánto valen x y y? Comprueben sus respuestas. ______________________________

3. Comparen sus resutados con otros compañeros. Discutan los pasos que se siguieron para resolver los sistemas de ecuaciones por medio del método propuesto. Éste se conoce como método de igualación. Discutan por qué piensan que se llama así y descríbanlo en su cuaderno.

pareja

Para formalizar

4. Realicen una lectura comentada de la siguiente información.

El procedimiento que usaron en la página anterior para resolver los sistemas de ecuaciones se conoce como **método de igualación**. Este consiste en despejar una de las incógnitas en ambas ecuaciones y después se igualan las expresiones resultantes para obtener una ecuación de primer grado. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 21 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Si es necesario, se simplifca una o ambas ecuaciones, dividiendo todos los términos, para poder despejar una de las incógnitas.

$\frac{2x + y}{2} = \frac{21}{2}$ es igual a la ecuación: $x + 0.5y = 10.5$

Después, se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones: $x = 10.5 - 0.5y$; $x = 3y$

Se obtiene la ecuación de primer grado: $10.5 - 0.5y = 3y$

Se resuelve la ecuación: $3.5y = 10.5$; $y = 3$

$2(9) + 3 = 21$

Finalmente, sustituimos y por su valor numérico en cualquiera de las ecuaciones para obtener x: $x - 3(3) = 0$; $x = 9$.

$9 - 3(3) = 0$

Sustituimos a x y a y en ambas ecuaciones para validar las soluciones.

5. Representen la siguiente situación por medio de un sistema de ecuaciones 2×2 y resúelvanlo, paso a paso, por medio del método de igualación.

a) Un número más 4 veces otro es igual a 16. Si dos veces el primer número menos cuatro veces el segundo es igual a -4, ¿de qué número se trata?

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Paso 1: ______________________________

Paso 2: ______________________________

Paso 3: ______________________________

Paso 4: ______________________________

Paso 5: ______________________________

6. Comparen su procedimiento con otros compañeros. Si tienen dudas, busquen el apoyo del profesor para aclararlas. ¿Qué diferencia observan entre este método y el de sustitución? Discutan lo anterior, comenten las diferencias entre ambos procedimientos y en qué tipo de situaciones usarían cada uno. Registren sus acuerdos en el cuaderno.

Ponlo en práctica

individual

7. Resuelve el siguiente problema.

Brenda y Gabriela fueron juntas a una tienda de ropa para aprovechar la promoción que decía: "Todas las prendas del mismo tipo tienen el mismo precio". Brenda compró dos faldas y dos blusas, por las que pagó \$920, mientras que Gabriela compró 1 falda y 4 blusas y pagó, en total, \$1 080.

a) Escriban el sistema de ecuaciones y resuélvanlo paso a paso, por el método de igualación.

b) ¿Cuánto cuesta cada tipo de prenda? ____________________

8. Inventa un problema que pueda resolverse por medio del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo por medio del método de igualación.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

$x =$ ________

$y =$ ________

____

____

____

____

____

9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de igualación. Escribe el procedimiento debajo de cada sistema.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x - y = 15 \end{cases}$$

$x =$ ________

$y =$ ________

$$\begin{cases} x + 2y = 21 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$$

$x =$ ________

$y =$ ________

$$\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$x =$ ________

$y =$ ________

10. Resuelve.

a) La suma de dos números es igual a 85 y su diferencia es 23, ¿de qué números de trata? ____________________

b) La edad de Pablo y de su hija Marcela suman 77 años. Si dentro de dos años la edad de Pablo será el doble de la de su hija, ¿Cuántos años tiene cada uno?

____

Método de sustitución

Propósito Resolverás sistemas de ecuaciones 2×2 por medio del método de sustitución.

pareja

1. Comenten los problemas y realicen lo que se pide.

Emiliano le dijo a su hermana: el dinero que yo tengo es el doble del tuyo, pero si yo te doy $18 los dos tendríamos la misma cantidad de dinero.

a) Llamen x al dinero de Emiliano y y al de su hermana, y escriban la ecuaciones que representan la situación:

- Tengo el doble de tu dinero: ______
- Si te doy $18 tendremos la misma cantidad: ______

b) ¿Cuánto dinero tienen Emiliano y su hermana? ______

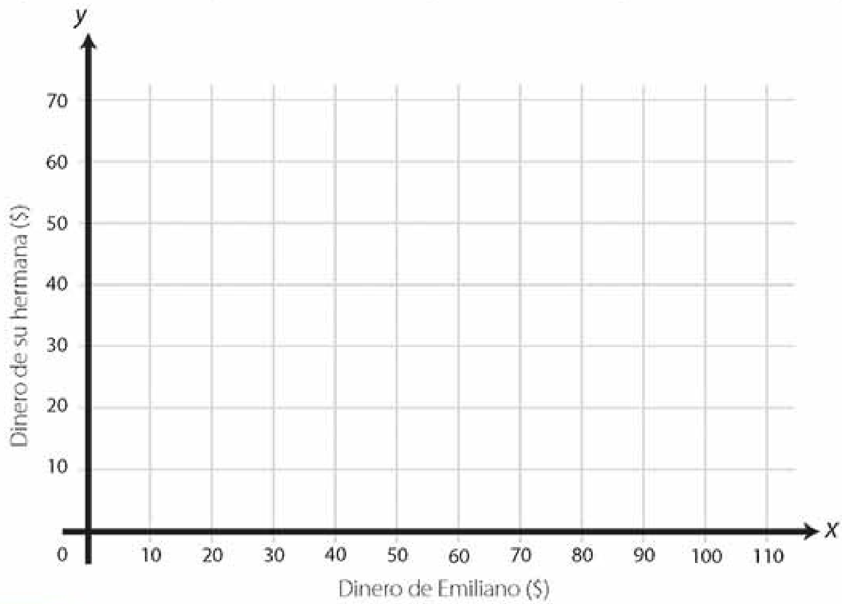
c) Describan el procedimiento que siguieron para resolver el problema. ______

______

d) ¿Será posible convertir la segunda ecuación en una de una sola incógnita? Argumenten su respuesta. ______

______

2. Representen en el plano el sistema que obtuvieron para validar su respuesta.



equipo

3. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En grupo discutan cómo podrían resolver el problema algebraicamente. Si alguien les comenta que el sistema se puede resolver mediante el método de sustitución, ¿a qué creen que se refiera y cómo suponnen que funciona dicho procedimiento? Discutan en equipo lo anterior en busca de acuerdos.

equipo

4. Retomen el problema de la página anterior y realicen lo que se indica.

a) En la ecuación: "Tengo el doble de tu dinero", ¿cuánto vale y algebraicamente?

____

b) En la ecuación: "Si te doy \$18 tendremos la misma cantidad", sustituyan a y por el valor del inciso anterior y escriban una nueva ecuación: _______________

c) ¿Qué características tiene esta nueva ecuación? _______________

____

d) Resuelvan la ecuación y determinen el valor de x: _______________

e) Sustituyan x en la primera ecuación y determinen el valor de y: _______________

____

f) ¿Coincide la solución con la que obtuvieron antes? Si no es así, revisen nuevamente el procedimiento en busca del error, para corregirlo.

5. Resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones siguiendo el procedimiento anterior.

Ecuación 1: $x + y = 34$; ecuación 2: $3x - y = 50$

a) Despejen y en la primera ecuación: _______________

b) Sustituyan y en la segunda ecuación para obtener una ecuación con una sola incógnita, en función de x y resuélvanla: _______________

____

c) Sustituyan x en cualquiera de las dos ecuaciones originales para encontrar el valor de y: _______________

6. El método anterior, con que resolviste los dos sistemas de ecuaciones, se llama de sustitución. Describan en su cuaderno en qué consiste dicho procedimiento.

a) Utilicen el procedimiento anterior para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y = 44 \\ 2x + 3y = 69 \end{cases}$$

$x =$ _______________

$y =$ _______________

grupo

7. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten sobre el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones. ¿Qué ventajas tiene sobre el método gráfico?

pareja

◂ Para formalizar

8. Realicen una lectura comentada de la siguiente información. Al final, validen sus resultados y procedimientos utilizados en las actividades previas.

Uno de los métodos que permiten resolver un sistema de ecuaciones 2×2 es el **método** de **sustitución**. Este consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra para obtener una ecuación con una sola incógnita. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 21 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Podemos despejar y en la primera ecuación o x en la segunda. En este caso, despejaremos x en la segunda ecuación: $x = 3y$.

Después, sustituimos x en la primera ecuación: $2(3y) + y = 21$.

Así obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita y la resolvemos: $6y + y = 21$; $7y = 21$; $y = 21/7 = 3$.

$2(9) + 3 = 21$

Finalmente, sustituimos a y por su valor numérico en cualquiera de las ecuaciones para obtener x: $x - 9 = 0$; $x = 9$.

$9 - 3(3) = 0$

Sustituimos a x y a y en ambas ecuaciones para validar las soluciones.

Ponlo ◂ en práctica

individual

9. Resuelve.

Javier es plomero y para hacer una instalación compró 3 m de tubo de cobre y 4 tubos conectores, por los que pagó \$297. Al otro día compró 1 m de tubo y 5 conectores que le hicieron falta y pagó \$165.

a) ¿Qué sistema de ecuaciones representa la situación?

____

b) Si Javier necesita comprar un conector más, ¿cuánto tiene que pagar por él?

____

c) ¿Cuánto cuesta el metro de tubo de cobre?

____

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de sustitución.

$\begin{cases} 6x - 2y = 8 \\ x + y = 16 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 30 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + y = 23 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$
$x =$ ________	$x =$ ________	$x =$ ________
$y =$ ________	$y =$ ________	$y =$ ________

Consulta en...

Ingresa a la página de Internet: https://es.khanacademy.org/math/algebra/systems-of-linear-equations/solving-systems-of-equations-with-substitution/e/systems_of_equations_with_substitution y resuelve los ejercicios de sistemas de ecuaciones, por medio del método de sustitución.

Método de suma y resta

Propósito Resolverás sistemas de ecuaciones 2×2 por medio del método de suma y resta.

equipo

1. Analicen la siguiente información y resuelvan el problema.

Dos veces la base de un rectángulo más su altura es igual a 32. Si tres veces la base, menos dos veces la altura es igual a 27, ¿cuál es el área del rectángulo? Para saberlo, primero debemos conocer las medidas del rectángulo.

a) Escribe el sistema de ecuaciones que representa la situación:

- Dos veces la base más la altura es igual a 32: ______
- Tres veces la base menos dos veces la altura es igual a 27: ______

b) ¿Cuál de los métodos vistos usarían para resolver el problema? Expliquen por qué. ______

c) ¿Cuál es el área del rectángulo? ______

2. Validen su sistema y su resultado con los de otros compañeros. Si existen diferencias en los resultados, aclárenlas para llegar a un sistema de ecuaciones en común.

3. Regresen a trabajar en equipo y resuelvan el sistema de ecuaciones anterior por medio del siguiente procedimiento.

a) Escriban una ecuación equivalente a la primera, de manera que *y* tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones. Escriban enseguida el sistema de ecuaciones resultante. Coloquen alineados los **términos semejantes**:

Glosario

Términos semejantes. Expresiones algebraicas que tienen las mismas literales, elevadas a la misma potencia, lo único que varía es el coeficiente.

Otra vista

Al multiplicar o dividir todos los términos de una ecuación por el mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.

b) Ahora sumen las ecuaciones. Recuerden que sólo se suman, entre sí, los términos semejantes.

c) ¿Cuál es el resultado de la suma? ¿Qué tipo de ecuación obtuvieron?

______

d) Resuelvan la ecuación resultante. ¿Cuánto vale *x*? ______

e) Resuelvan el sistema de ecuaciones y validen que coincide con la respuesta que obtuvieron antes.

4. Analicen el siguiente sistema de ecuaciones y respondan:

Ecuación 1: $2x + 4y = 10$ **Ecuación 2:** $5x - 3y = 12$

Luisa dice que no es conveniente utilizar el procedmiento anterior, porque se tendrían que multiplicar ambas ecuaciones, porque los coeficientes no son múltiplos.

a) ¿Están de acuerdo con Luisa? ¿Por qué? ____________________

b) ¿Qué método sería más conveniente para resolver el sistema anterior?

Para demostrar su postura escribió el siguiente sistema de ecuaciones equivalente:

Ecuación 1: $10x + 20y = 50$ **Ecuación 2:** $10x - 6y = 24$

c) ¿Qué hizo Luis para obtener estas ecuaciones? ¿Son válidas? Expliquen por qué.

____

____

d) Resten a la primera ecuación la segunda y resuelvan el sistema de ecuaciones. Después, resuelvan el original por alguno de los métodos que conocen para comprobar si la respuesta es correcta.

e) ¿Cuánto valen x y y? ____________________

5. En los siguientes sistemas de ecuaciones, escriban ecuaciones equivalentes de manera que queden igualados los valores absolutos de los coeficientes de una de las incógnitas. Después, sumen o resten, resuelvan la ecuación resultante y también el sistema de ecuaciones.

Sistema original	$x + y = 65$ $3x - 4y = 27$	$7x + 2y = 30$ $x + 4y = -18$
Sistema resultante al multiplicar una de las incógnitas para igualar coeficientes		
Suma o resta de las ecuaciones para reducir a una incógnita		
Solución de la ecuación de primer grado resultante		
Solución del sistema		

6. En grupo discutan sus resultados y este nuevo procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones. ¿En qué difiere de los anteriores, en qué es semejante? Discutan lo anterior y registren los pasos para resolver un sistema de ecuaciones con este procedimiento.

Para formalizar

pareja

7. Lee la siguiente información. Después reúnete con un compañero para comentarla. Revisen el procedimiento que escribieron para validarlo o corregirlo, si fuera necesario.

El procedimiento que usaron en las actividades anteriores se conoce como método de suma y resta. Como su nombre lo indica, se suman o restan las ecuaciones del sistema de manera que se obtenga una sola ecuación de primer grado. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 21 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

El el sistema que se muestra, se pueden multiplicar los términos de cualquiera de las dos ecuaciones para igualar los valores absolutos los coeficientes de una de las incógnitas; en este caso vamos a multiplicar la primera: $(3)2x + (3)y = (3)21$; $6x + 3y = 63$; así igualamos los coeficientes de y.

Alineamos los términos semejantes y sumamos las ecuaciones (debido a que a y la antecede un signo negativo).

$$\begin{array}{r} + \quad 6x + 3y = 63 \\ \underline{x - 3y = 0} \\ 7x + 0 = 63 \end{array}$$

Así obtenemos una ecuación lineal con una incógnita y la resolvemos: $7x = 63$; $x = 63/7 = 9$

$2(9) + 3 = 21$

Finalmente, sustituimos x por su valor numérico en cualquiera de las ecuaciones para obtener y: $9(2) + y = 21$; $y = 21 - 18 = 3$.

$9 - 3(3) = 0$

Sustituimos a x y a y en ambas ecuaciones para validar las soluciones.

Este procedimiento es recomendable cuando los coeficientes de una de las incógnitas son múltiplos entre sí.

Ponlo en práctica

individual

8. Identifica si los siguiente sistemas de ecuaciones tienen errores, señálalos y completa el procedimiento.

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 8x - 3y = 29 \end{cases}$$

$x =$ ______

$y =$ ______

$$\begin{array}{r} + \quad 6x + 3y = 9 \\ \underline{8x - 3y = 29} \\ 14x - 0 = 38 \end{array}$$

$x = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

______

$$\begin{cases} x + 2y = 18 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$$

$x =$ ______

$y =$ ______

$$\begin{array}{r} - \quad 3x + 6y = 54 \\ \underline{3x - 3y = 18} \\ 0 + 9y = 36 \end{array}$$

$y = \frac{\quad}{\quad} =$ ______

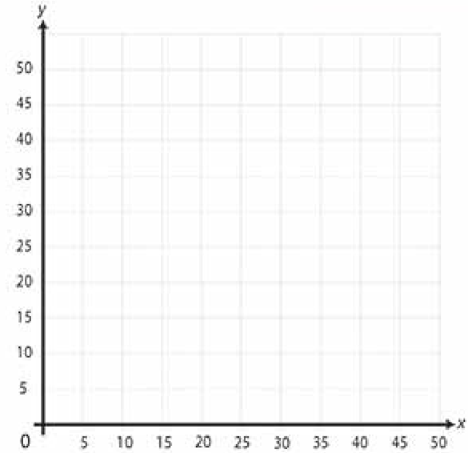
9. Javier cambió un cheque en el banco por \$1 270 y pidió que le dieran el dinero en billetes de \$20 y de \$50. Si recibió 35 billetes en total, ¿cuántos recibió de cada denominación? ______

individual

1. Representa y resuelve gráficamente los siguientes problemas.

a) En una tienda tienen dos tipos de perfumes almacendados en una cajas A y B. En total tienen 47 perfumes y el número de perfumes A rebasa a los B en tres piezas.

¿Cuántas piezas tienen de cada perfume? ______________________



b) La suma de dos números es igual a 124 y el doble de uno menos el otro es igual a 44. Grafica la situación en tu cuaderno.

¿De qué números se trata? ______________________

2. Anota cuántas soluciones tienen los siguientes problemas.

a) Dos números sumados dan como resultado 8 y el doble de uno más el doble del otro da como resultado 24. ¿Cuáles son esos números? __________

b) Dos números sumados son igual a 12 y el triple de uno más el otro es igual a 30, ¿de qué números se trata? ______________________

c) La diferencia de dos números es de 7 y la diferencia del doble de uno menos el doble del otro es 14. ¿Cuáles son esos números? __________

3. Elige el método de sustitución, igualación o suma y resta más adecuado para resolver cada sistema de ecuaciones y resuélvelos.

a) $x + y = 2$
$5x - 3y = 14$

$x =$ ________
$y =$ ________

b) $a + 7b = 23$
$5a - b = 29$

$a =$ ________
$b =$ ________

c) $9m + 5n = 71$
$5m - 3n = -1$

$m =$ ________
$n =$ ________

4. Resuelve los siguientes problemas.

a) Jorge compró 20 litros de dos tipos de pintura, blanca y azul. El litro de pintura blanca le costó \$48 y la de color azul, \$72. Si pagó \$1 152, ¿cuánto litros compró de cada color de pintura? ______________________

b) Samuel es 8 años mayor que su hermana y sus edades suman 38 años. ¿cuántos años tiene Samuel? ______________________

◂ Integramos

Consulta en...

En esta página electrónica resuelve los problemas sobre sistemas de ecuaciones 2×2, mediante el método que consideres más adecuado: www.vitutor.com/ecuaciones/sistemas/problemas_%E2%80%8Bsistemas.html

Aprendizaje esperado: Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Gráficas de proporcionalidad inversa

Camino al trabajo

Exploramos

individual

1. Resuelve la siguiente situación.

Selene camina todos los días de su casa al trabajo. La distancia que recorre es de 1 200 metros. Ella tiene una aplicación en su teléfono celular que le indica el número de pasos que da, y en promedio ella da 1 500 pasos para llegar a su trabajo.

a) De acuerdo con la información, ¿de qué medida, en promedio, son los pasos de Selene? ______

b) Completa la tabla que muestra la distancia que recorre Selene de acuerdo con el número de pasos que se muestran.

Número de pasos	250	400	650	900	1 150	1 270	1 500
Distancia (m)							

c) ¿Qué tipo de relación representa la tabla? ______

d) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ______

En mi entorno

¿Sabías que actualmente existen aparatos y aplicaciones en los teléfonos celulares que son capaces de medir el número de pasos que da una persona? Caminar se ha vuelto una actividad muy importante en cuestiones de salud. Se estima que dar 10 mil pasos es ideal para mantener un buen estado físico. ¿Tú cuántos pasos das al día? Si tienes oportunidad, descarga la aplicación. ¡Vamos a caminar!

2. El día de hoy su hija acompañó a Selene a su trabajo y se fueron caminando.

a) Si la niña dio 2 500 pasos para llegar al trabajo, ¿de qué tamaño son sus pasos?

______

b) Completa la siguiente tabla que muestra el número de pasos, según el tamaño, que se darían para ir de casa de Selene a su trabajo.

Tamaño de los pasos (m)	0.4	0.5	0.6	0.75	0.8	0.9	0.95
Número de pasos							

c) ¿Qué tipo de relación muestra la tabla? ______

d) ¿Qué expresión algebraica la representa? ______

3. Compara tus resultados con los de algún compañero. ¿Qué características de la gráfica del primer problema son similares a los de la gráfica del segundo problema? Comenten lo anterior en parejas, después, comparten su postura con la de otros compañeros.

Gráficas de relaciones de proporcionalidad

Propósito Representarás relaciones de proporcionalidad directa e inversa tabular, algebraica y gráficamente y analizarás las diferencias entre ambos tipos de representaciones.

◂ Transitamos

pareja

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

En la secuencia 7 resolvieron un problema en el que Liliana recorría 6 km en una caminadora eléctrica. Ahora, consideren que Diego programa la caminadora para recorrer 10 km en 50 minutos.

a) ¿Cuál será la velocidad de la máquina en km/h? ______

b) ¿En cuánto tiempo recorrerá cada kilómetro? ______

c) ¿Qué distancia recorrerá cada minuto? ______

d) Completen la siguiente tabla que muestra la distancia recorrida en función del tiempo.

Tiempo (min)	5	8	12	18	21	28	35	42	48	50
Distancia (km)										

2. Representen en el siguiente plano cartesiano los puntos que corresponden a cada pareja de datos de la tabla y únanlos para construir la gráfica.

a) ¿Qué características tiene la gráfica?

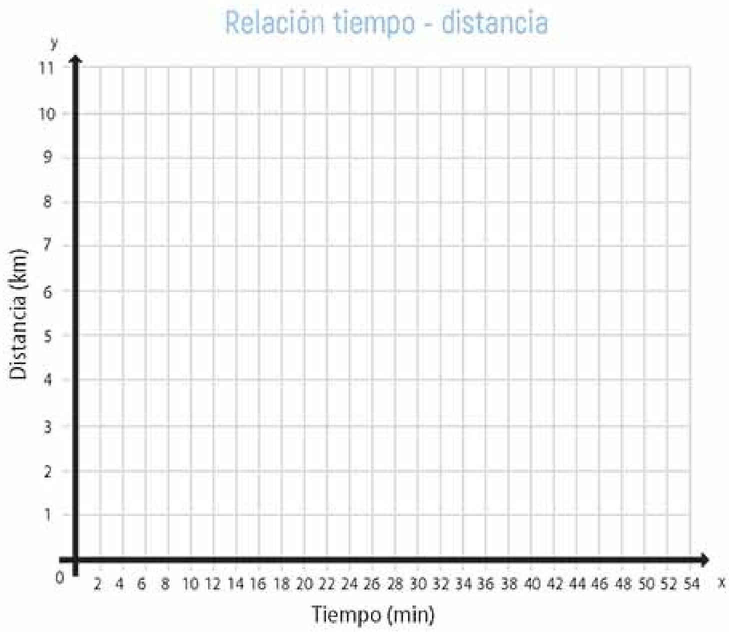
______

b) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ______

c) ¿Qué sucede con la distancia recorrida cuando el tiempo aumenta?

______

d) ¿Qué tipo de relación representa la gráfica? ______



pareja

3. Consideren la siguiente situación y realicen lo que se pide.

Un grupo de corredores, como parte de su entrenamiento, tienen que recorrer 10 km sobre una caminadora, corriendo cada uno a su propio ritmo.

a) Si una persona programa la máquina a una velocidad de 8 km/h, ¿en cuántos minutos recorrerá 1 km? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta. ____________

____

b) ¿En cuántos minutos recorrerá los 10 km? ____________

c) Completen la tabla que muestra cómo programaron diferentes atletas las máquinas para saber en cuánto tiempo recorrerán los 10 km.

Velocidad (km/h)	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Tiempo del recorrido (min)									

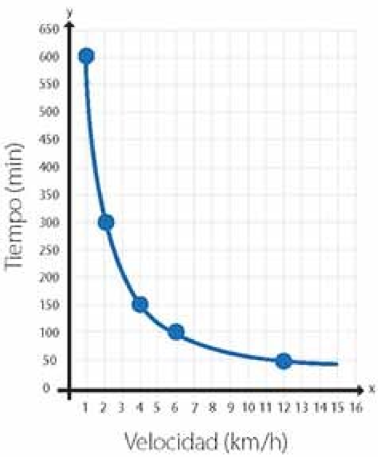
d) ¿Qué sucede con el tiempo cuando aumenta la velocidad? ____________

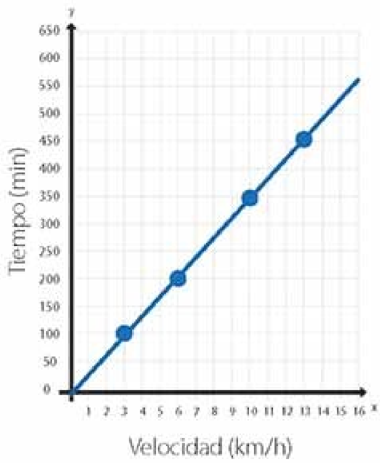
e) ¿Qué valor es constante en cada pareja de datos? ¿Cómo se obtiene? ____________

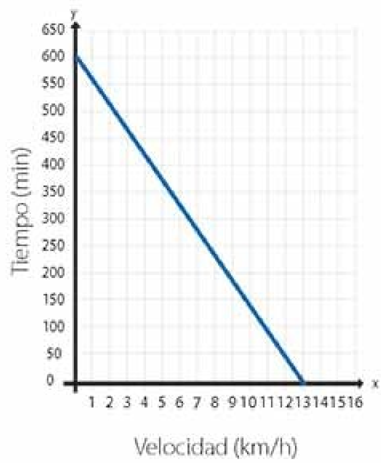
____

f) ¿Qué tipo de relación representan los valores de la tabla? ____________

4. Identifiquen, en las siguientes gráficas, parejas de valores de la tabla y determinen cuál representa la situación.







a) ¿Cuál de las gráficas representa la situación? ____________

b) Describan las características de la gráfica. ____________

equipo

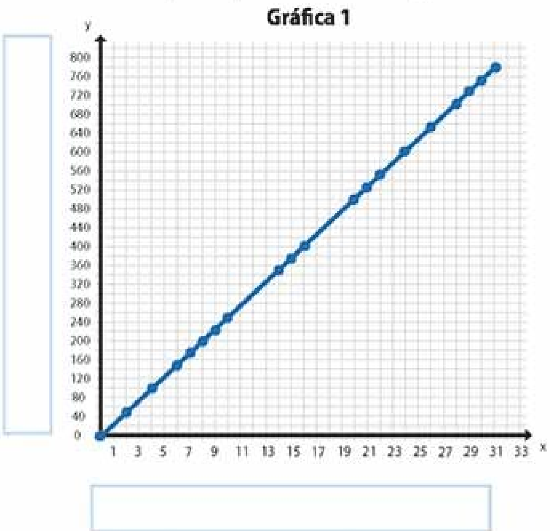
5. Comenten con otros compañeros las características que observaron en la gráfica de una relación de proporcionalidad directa. Discutan sobre por qué toma dicha forma y las diferencias con las gráficas de relaciones de proporcionalidad directa.

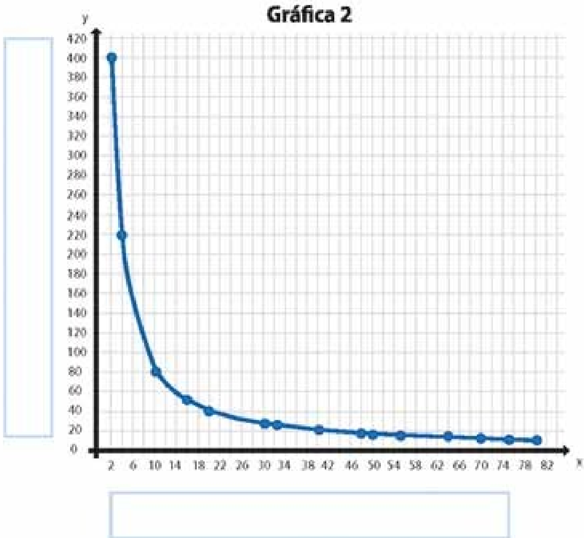
equipo

6. Analicen la siguiente información y resuelvan las actividades.

Las siguientes gráficas las construyeron unos estudiantes. Una muestra el tiempo de llenado de un tinaco con un chorro de agua constante (L/min), y la otra muestra cómo se modifica el tiempo de llenado en función de la cantidad de agua por minuto que cae.

a) Coloquen sobre los ejes los títulos que corresponden de acuerdo con la información que representa cada gráfica.





b) Indentifiquen puntos (coordenadas) sobre cada gráfica que correspondan a los valores de x que muestran las siguientes tablas y complétenlas.

Gráfica 1

x	y
2	
6	
16	
20	
32	

Gráfica 2

x	y
2	
10	
16	
25	
40	

c) ¿Cuál es la constante en cada caso? _____

d) En el contexto del problema, ¿qué representa la constante en la gráfica 2? _____

e) De acuerdo con la respuesta anterior y la gráfica 1, ¿en cuánto tiempo se llena el tinaco?

f) ¿Qué expresión algebraica representa cada situación? _____

grupo

7. Discutan sus respuestas con el apoyo del profesor. Establezcan una estrategia que permita construir una gráfica que muestre una relación de proporcionalidad inversa.

pareja

8. Resuelvan en parejas las siguientes actividades.

Se quiere construir un triángulo rectángulo cuya área sea igual a 114 cm^2.

a) Discutan en parejas dos posibles medidas para la base y dos para la altura del triángulo y anótenlas enseguida. ______________________________

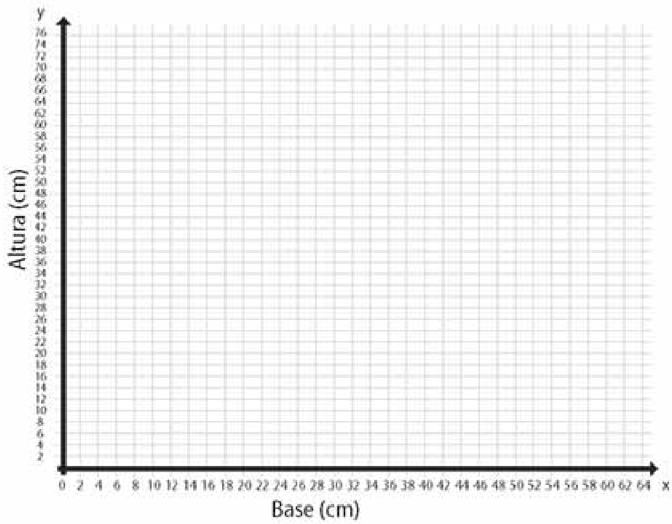
____

Propuesta 1	
Base:	Altura:

Propuesta 2	
Base:	Altura:

b) ¿Qué sucedió con la altura cuando la base aumentó o disminuyó?

Medidas de un triángulo de área 114 cm^2



9. Comparen sus medidas con las de otros compañeros. Después, localicen todas las parejas de puntos en el siguiente plano y construyan la gráfica correspondiente.

10. Si es necesesario, alarguen la gráfica hacia la derecha y hacia arriba lo más posible, localizando otras parejas de puntos.

a) ¿Qué tipo de relación representan la base y la altura del triángulo cuando el área se mantiene constante? ______________________________

b) ¿Qué punto sobre el eje *y* le corresponde a la base 32? ______________

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______________________

d) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ________________

e) Describan las características de la gráfica. ¿Qué sucede con la altura conforme aumenta la medida de la base del triángulo? ______________________

11. Comparen su gráfica con la de otros compañeros. Si existen diferencias, analicen cada caso, con la idea de detectar dónde cometieron el error para corregirlo. Si es necesario, construyan una tabla asignando valores a la base y encontrando la medida de la altura correspondiente.

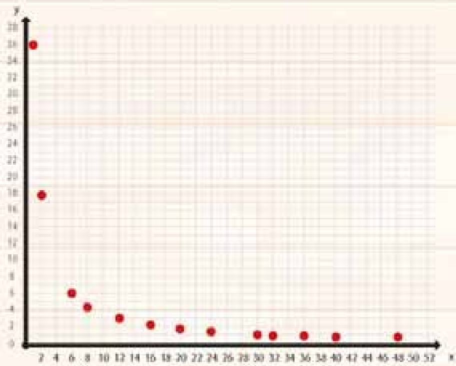
grupo

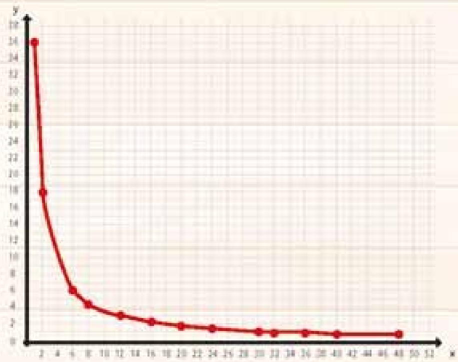
12. Con el apoyo del profesor, lean el siguiente texto en grupo. Si tienen dudas, coméntenlas para que sean aclaradas.

◀ Para formalizar

Se dice que dos variables numéricas se relacionan de manera inversamente proporcional cuando, al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción, es decir, tienen una relación de **proporcionalidad inversa**. La expresión general de una relación de proporcionalidad inversa es: $y = k/x$, donde k representa a la constante de proporcionalidad.

La gráfica de una relación de proporcionalidad es llamada **hipérbola**, por su forma. Para construir una gráfica de proporcionalidad inversa, se localizan coordenadas (puntos) en el plano que satisfagan la relación: se asignan valores x, y para los puntos sobre y, se divide la constante entre x; se localiza los puntos en el plano y, finalmente, se unen para construir la gráfica, como se muestra en la siguiente gráfica, en la que se representa la relación entre la base y la altura de un rectángulo de área 36 u^2.





La expresión algebraica de una relación de proporcionalidad inversa se puede obtener a partir de su gráfica. Se localiza un punto sobre la hipérbola y se multiplican los respectivos valores para obtener la constante de proporcionalidad. Por ejemplo, ubicamos la coordenada (4, 9) y multiplicamos dichos valores: $4 \times 9 = 36$, así tenemos que $y = 36/x$.

Todos los puntos sobre una gráfica de proporcionalidad inversa deben cumplir con: $xy = k$.

13. Respondan a partir de la gráfica de la sección anterior.

a) ¿A qué valor sobre y le corresponde $x = 12$? ____________________

b) Completen la siguiente tabla a partir de los datos de la gráfica.

Base (x)		4			16	
Altura (y)	18		3.6	3		1.8

14. Si tienen dudas sobre cómo se construye una gráfica de una relación de proporcionalidad inversa, consulten con su profesor para disiparlas.

Ponlo en práctica

individual

15. Miguel quiere construir un **silo** con forma de prisma rectangular, para almacenar granos de maíz, con un volumen o capacidad de 18 m^3.

Glosario

Silo. Lugar diseñado para almacenar grano y otros materiales a granel que permite se mantenagan en condicines ideales.

a) Si cuenta con una superficie de 8 m^2, ¿cuál debe ser la altura del silo para que tenga el volumen requerido? ¿Cómo obtuviste la respuesta? ____________

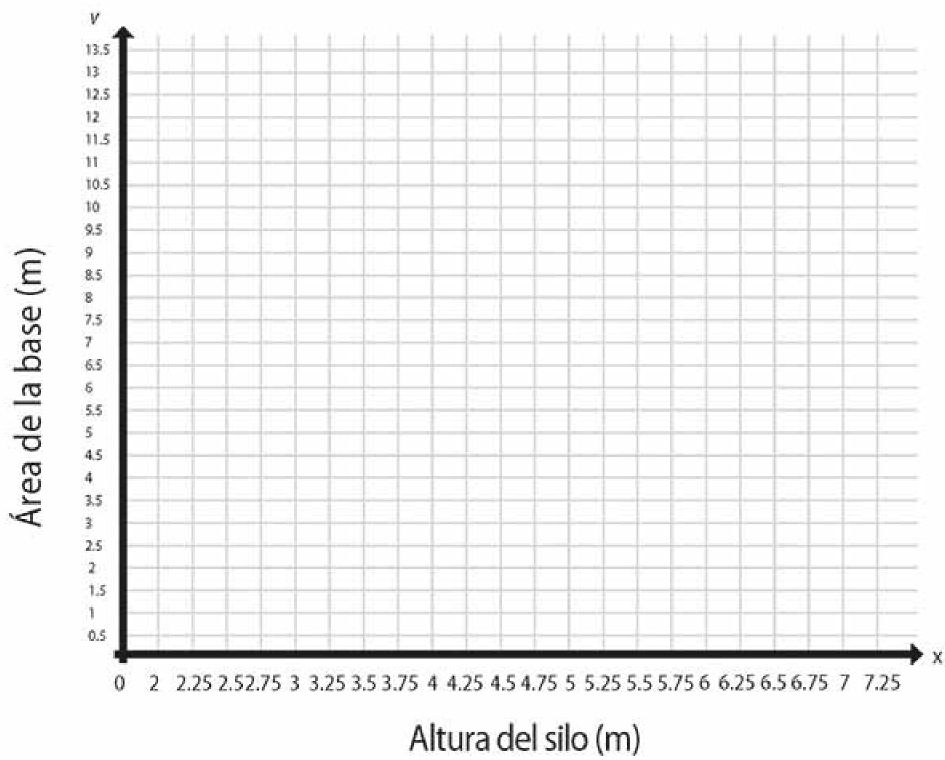
____

b) Si Miguel quiere que el silo tenga mayor altura, ¿qué debe hacer con el área de la base para conservar el mismo volumen? ____________

c) Completa la tabla, con medidas para la base del silo que cumplan con el volumen requerido, de acuerdo con la altura que se muestra.

Altura (m)	2	2.25	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Área de la base (m^2)								

d) Construye la gráfica en el siguiente plano.



e) ¿Qué expresión algebrica permite obtener el área de la base del silo para cualquier altura? ____________

f) Si Miguel decidió que la altura del silo fuera de de 2.4 m, ¿cuál es el área de la base? ____________

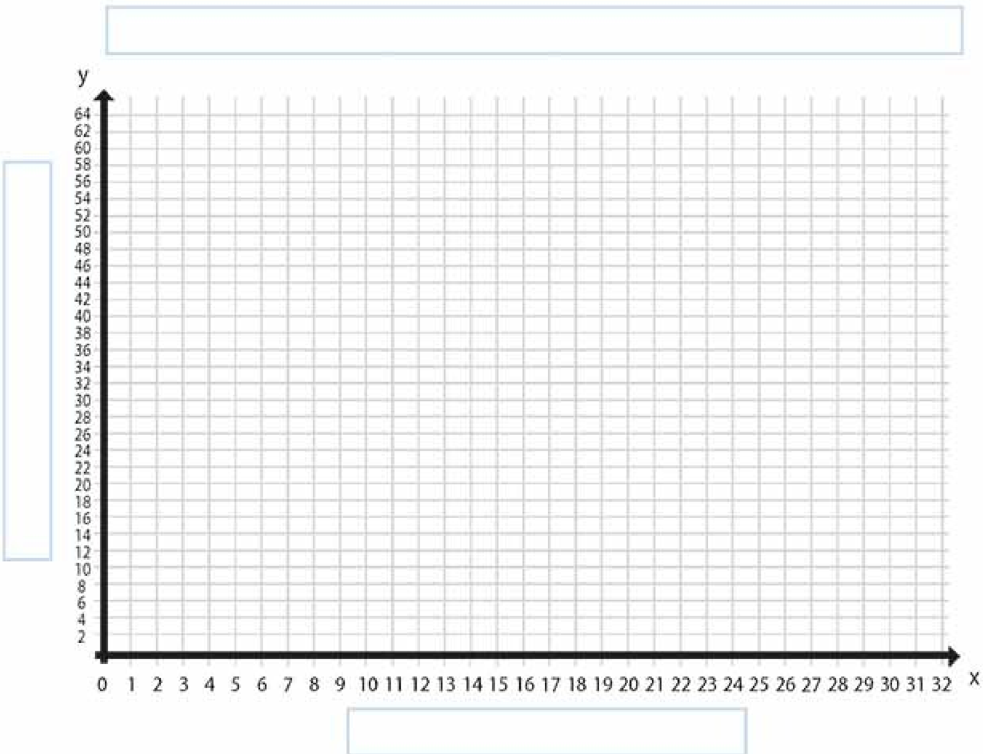
16. Construye en tu cuaderno una tabla y una gráfica de posibles medidas para los lados de la base del silo, considerando el área anterior.

17. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de cuadrillas que se necesitan para pavimentar una carretera y los días que se requieren para terminar el trabajo, considerando que las cuadrillas trabajan al mismo ritmo.

a) Completen la tabla a partir de la información anterior.

Número de cuadrillas	2	4	5	10	20	25	30
Días de trabajo		15					

b) Anoten los títulos correspondientes y construyan la gráfica en el siguiente plano.



Consulta en...

En el programa de geometría dinámica: GeoGebra puedes construir gráficas de proporcionalidad inversa. Abre un archivo y en la ventana inferior "Entrada", escribe la expresión algebraica de la relación, por ejemplo, $y = 72/x$, y da enter.

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la situación? ______

______

d) Si el presupuesto de la empresa sólo permite contratar 8 cuadrillas, ¿en cuánto tiempo se llevaría a cabo el trabajo? ______

______

18. Inventa un problema que se resuelva por medio de una relación de proporcionalidad inversa. Escríbelo en el siguiente espacio y en tu cuaderno construye la tabla y la gráfica que represente la situación. ______

______

______

______

19. Comparte tu trabajo con otros compañeros para validar que tu planteamiento es correcto.

Características de una gráfica de proporcionalidad inversa

Propósito Analizarás las características generales de una gráfica de proporcionalidad inversa y resolverás problemas al respecto.

Glosario

Creciente. Que aumenta de manera progresiva.
Decreciente. Que va de menor a menor (decrece).

parejas

1. Construyan la gráfica de proporcionalidad que represente la siguiente situación. Un tren viaja a velocidad promedio de 80 km/h durante un trayecto de 5 horas.

a) ¿Qué distancia recorre el tren? ____________________

b) Completen la siguiente tabla que muestra el tiempo que tardaría un tren en realizar el viaje si su velocidad promedio fuera la que se indica.

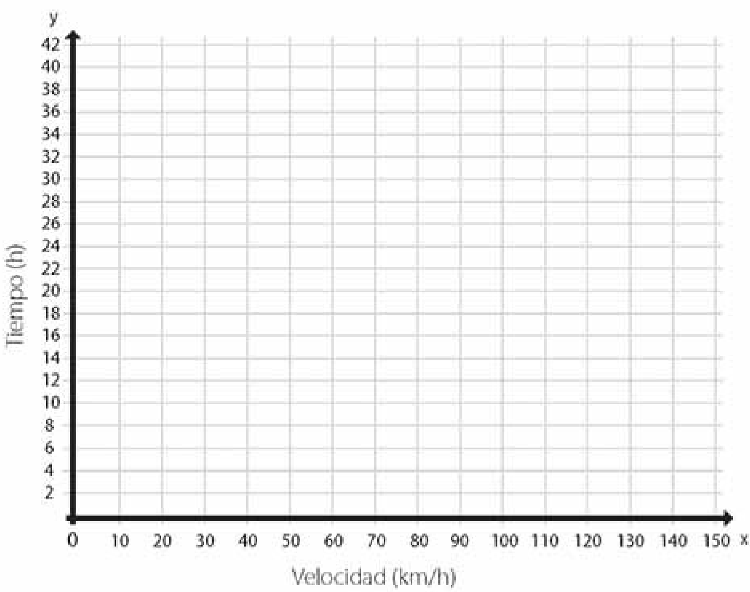
Velocidad (km/h)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Tiempo (h)										

c) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? ¿Por qué? ____________________

____

2. Construyan en el siguiente plano la gráfica correspondiente.

a) Escriban la expresión algebraica que representa la situación: ____________________



b) ¿La gráfica es creciente o decreciente? Expliquen por qué se da este tipo de gráfica.

____

____

c) ¿Cómo es la pendiente entre 10 y 20 km/h comparada con la pendiente entre 20 y 30 km/h? ¿Por qué se da la diferencia? ____________________

____

____

d) ¿Qué sucede con la forma de la gráfica cuando aumentan los valores de *x*? ____________________

____

equipos

3. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten las características de las gráficas de proporcionalidad inversa a partir de las preguntas de la actividad. ¿Qué otras características observan? Registren sus acuerdos en su cuaderno.

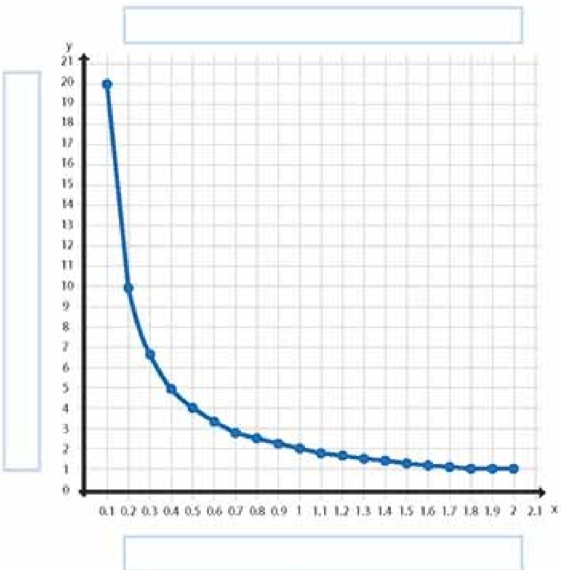
equipo

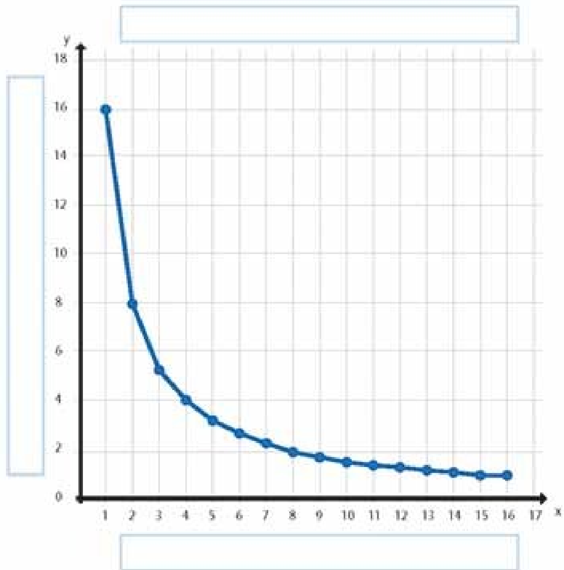
4. Lean la información, analicen las gráficas y respondan.

La siguientes gráficas muestra la relación entre el tiempo en que se llevaría a cabo una construcción de acuerdo con las personas que participarán en ella, y la otra representa el número de vasos que se pueden llenar con una botella de cierta capacidad, según el tamaño de los vasos.

a) ¿Qué gráfica representa cada situación? Coloquen los títulos correspondientes en cada una. Argumenten su postura. ______

______





b) ¿Qué expresión algebraica representa cada situación? ______

¿Cuál es la capacidad de la botella con la que se llenan los vasos? ______

c) ¿Cuál es el máximo número de días que se tienen considerados para realizar el trabajo? ______

d) En el problema de los trabajadores, ¿es posible considerar valores como 2.5 para *x*? ¿Por qué? ______

e) ¿Cómo se muestra lo anterior al comparar la forma de las gráficas? ______

______

f) Con relación a los ejes, ¿qué sucede con la gráfica entre más se acerca *x* a cero?

______

g) ¿En algún momento *y* puede ser cero? ¿Por qué? ______

______

grupo

5. Validen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten sobre la importancia de conocer las características de la gráfica de proporcionalidad inversa y cómo difieren cuando *x* representa valores discretos (no puede representar números decimales).

pareja

6. Consideren los números de la tabla como un factor de multiplicaciones cuyo producto es igual a 24, y escriban el otro factor.

x	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−8	−10	10	8	6	5	4	3	2	1
y																

a) ¿Por qué los valores de la tabla representan una relación de proporcionalidad inversa? ______

______

b) ¿Por qué no se incluyó el cero en la tabla? ______

______

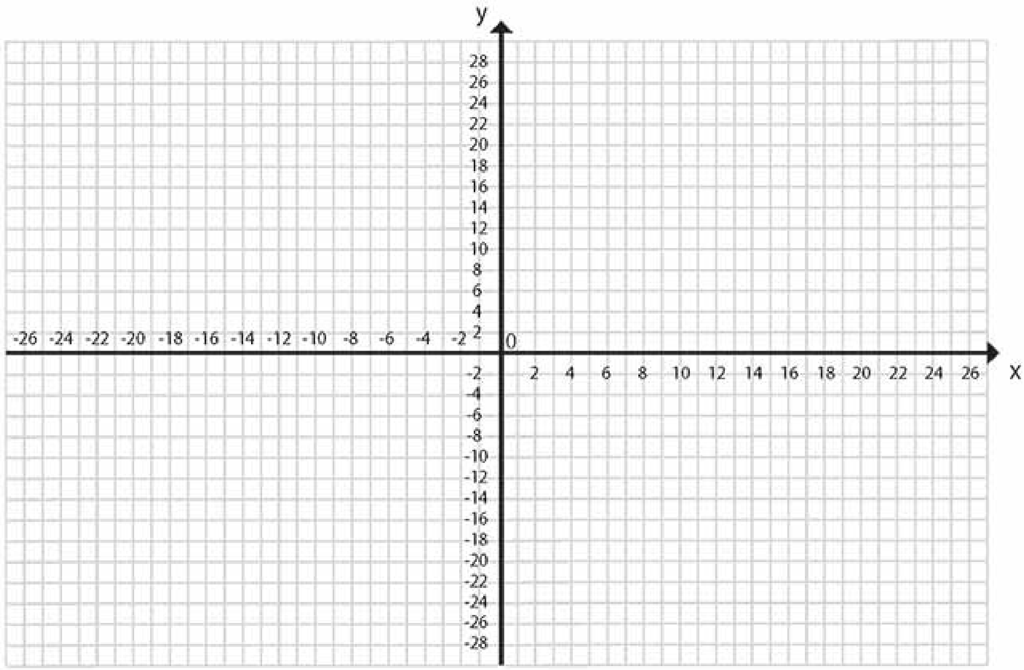
7. A partir de la tabla construyan la gráfica. Identifiquen puntos intermedios a los valores que muestra la tabla (mayores que 10 y menores que −10) para construir la gráfica.

Consulta en...

Ingresa a la siguiente página de internet:

https://www.edu.xunta.gal/centros/cafi/aulavirtual2/pluginfile.php/31858/mod_imscp/content/1/ejercicios2.html

Resuelve los problemas interactivos sobre relaciones de proporcionalidad inversa.



a) ¿Qué características muestra la gráfica? ¿Por qué no es continua? ______

______

b) ¿Qué relación tiene la forma de la gráfica con el hecho de que no se incluyera el cero en la tabla? ______

______

grupo

8. En grupo y con el apoyo del profesor, realicen un registro a modo de resumen de las características generales de las gráficas de proporcionalidad inversa. Justifiquen por qué las gráficas no intersecan a los ejes *x* y *y*.

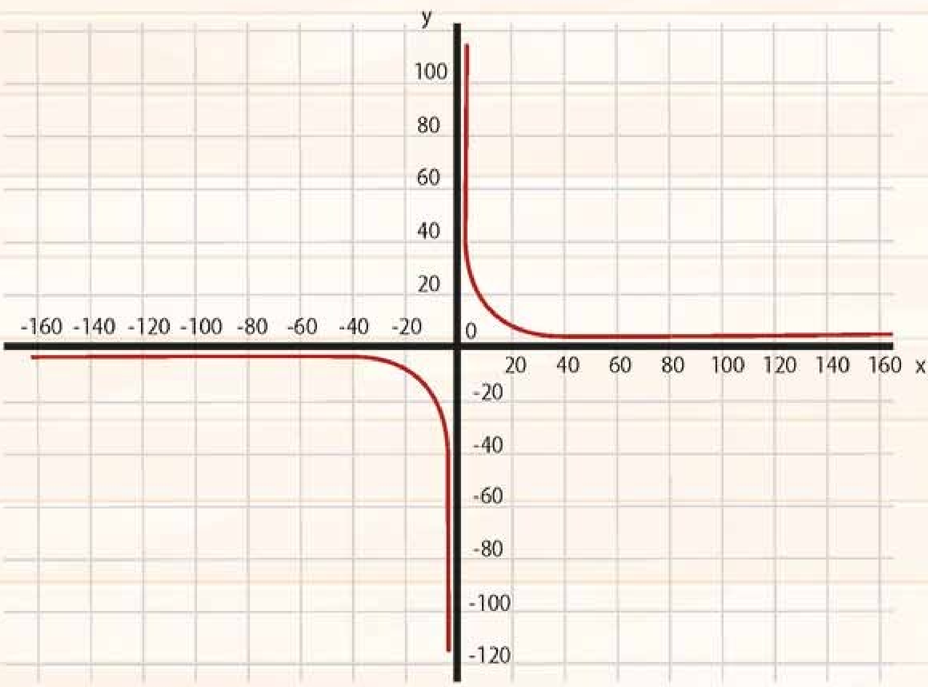
pareja

9. Lean detenidamente la siguiente información. Después, revisen las características que observaron y registraron sobre las gráficas de proporcionalidad inversa. Si es necesario, corrijan o complementen sus conclusiones.

◂ Para formalizar

Las gráficas de relaciones de proporcionalidad inversa cumplen con ciertas características:

- Cuando los valores de *x* aumentan la pendiente de la hipérbola disminuye.
- Al considerar valores positivos y negativos para *x*, se forma una hipérbola con dos ramas, como la siguiente: $y = 180/x$.

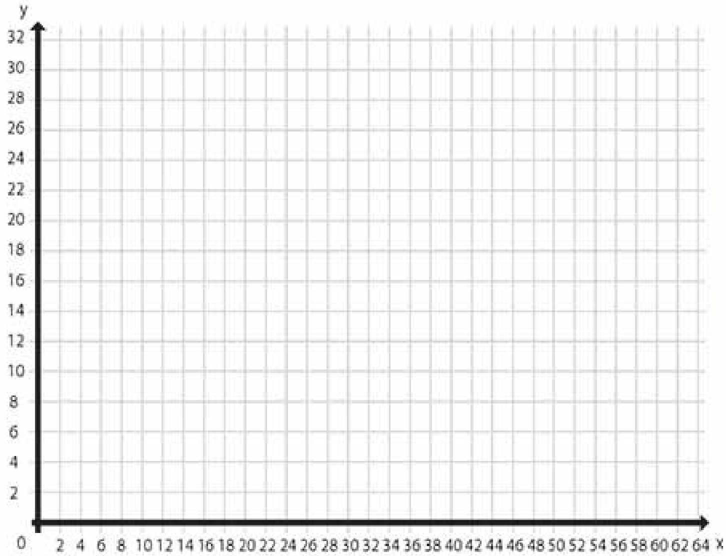


- Las variables *x* y *y* nunca pueden ser cero. Aritméticamente se demuestra considerando que en la expresión: $xy = k$, ni *x* ni *y* pueden ser cero, porque todo número multiplicado por cero es igual a cero.
- Por la razón anterior, las gráficas son discontinuas, es decir, nunca intersecan los ejes *x* y *y*.
- Una variable discreta es aquella que no puede tomar ciertos valores, sólo aquellos que pertenecen a cierto conjunto, por ejemplo, el número de personas, animales o cosas que no pueden representarse como medidas fraccionarias o decimales.
- Por esto, cuando la gráfica representa variables discretas se asemeja a una hipérbola, sin serlo del todo.
- En el plano anterior, pueden notar cómo las hipérbolas se acercan a los ejes *x* y *y*, pero nunca los tocan.

Ponlo en práctica

individual

10. Completa la tabla y construye la gráfica que representa la relación de proporcionalidad inversa: $y = 60/x$.



x	y
2	30
5	12
6	10
10	6
15	4
30	2
40	1.5

11. Paola quiere contratar una camioneta con capacidad para 20 personas para realizar una excursión. Ella quiere dividir el costo de la renta en partes iguales entre las personas que realicen el viaje.

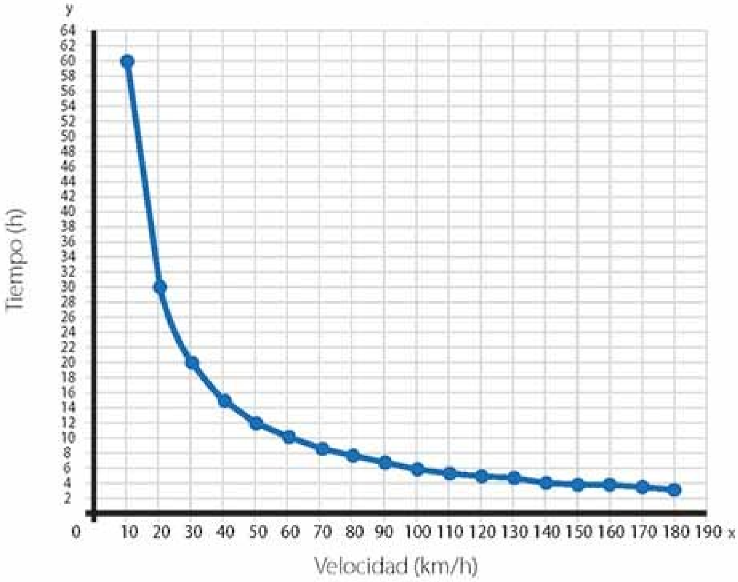
a) Completa la tabla. Anota lo que tienen que aportar de acuerdo con el número de personas que realicen el viaje, considerando que la renta es de $2 600.

Personas	4	5	8	10	12	15	18	20
Costo por persona ($)								

b) Si finalmente asistieron 16 personas a la excursión, ¿cuánto tuvo que aportar cada una? ____________________

c) Traza la gráfica correspondiente en el siguiente plano.

1. Completa la siguiente tabla a partir de la gráfica que muestra la relación velocidad-tiempo y escribe la expresión algebraica correspondiente.



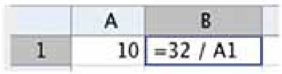
Velocidad (km/h)	Tiempo h
20	
50	
80	
100	
120	
160	

Expresión algebraica:

____

2. En GeoGebra puedes construir una gráfica de proporcionalidad inversa de la siguiente manera:

a) Abre un archivo y con la herramienta "Segmento", traza un segmento sobre el eje *y*, desde el origen de la longitud que prefieras, hacia arriba.

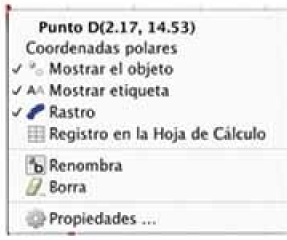


b) En una hoja electrónica, del mismo archivo, escribe el nombre del segmento en la celda A1.

c) En la celda B1, escribe la regla de la relación, en función del segmento anterior, por ejemplo: =32/A1.

d) Ahora, con la herramienta "Segmento de longitud dada su medida", coloca el cursor en el origen y da clic; en la ventana que parece escribe B1. Sobre el eje *x* aparecerá un nuevo segmento.

e) En la celda C1 escribe la fórmula =A1*B1. Después, mueve sobre los ejes cualquiera de los dos segmentos y observa si C1 permanece constante.

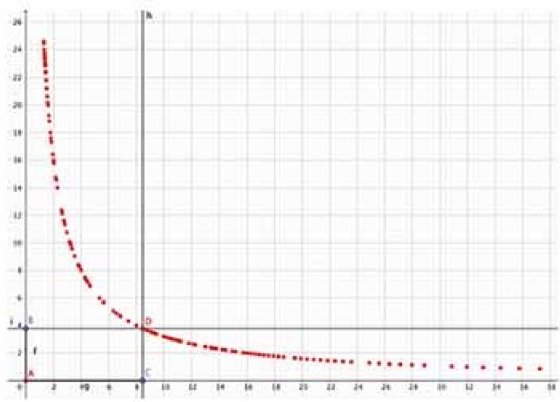


3. Para construir la gráfica realiza lo siguiente:

a) Traza segmentos perpendiculares a los segmentos anteriores que pasen por sus extremos y coloca un punto donde se intersecan.

b) Da clic con el botón derecho sobre el punto anterior y actida la función rastro.

c) Finalmente, mueve el segmento sobre el eje *y* y observa cómo se forman puntos sobre el plano.



4. Siguiendo el procedimiento anterior, construye las gráficas de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $y = 120/x$ b) $y = 86/x$ c) $y = 225/x$

Área de polígonos regulares y del círculo

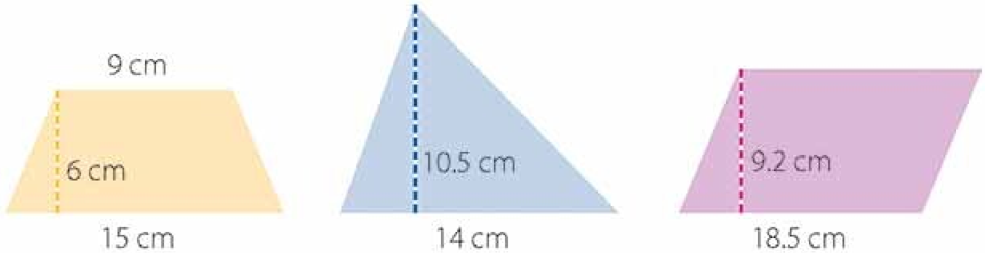
Aprendizaje esperado: Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Área y perímetro

Exploramos

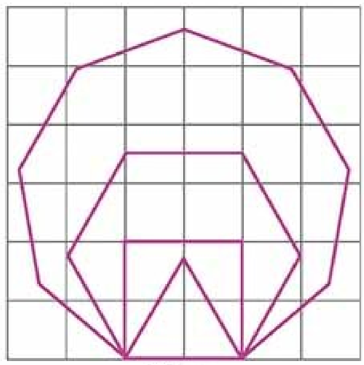
individual

1. Calcula el área de las siguientes figuras.



A = ______ A = ______ A = ______

2. Pedro construyó en un programa de geometría dinámica los siguientes polígonos regulares que comparten un lado.



a) Si el lado que comparten mide 20 cm, ¿cuál es el perímetro de cada figura?

Triángulo: ______ Cuadrado: ______

Hexágono: ______ Nonágono: ______

b) ¿Cuál es el área del cuadrado? ______

c) Observando las figuras, aproximádamente, ¿cuál es el área del triángulo? ______

______

d) Estimen el área del hexágono y del nonágono a partir del área de los cuadrados de la retícula. ______

e) ¿Qué relación observan entre el triángulo y el hexágono? ______

______

3. Responde las preguntas.

a) ¿Cuál es el perímetro de un círculo cuyo radio mide 5.5 cm? ______

b) ¿Qué relación hay entre el radio y el diámetro de un círculo? ______

______

Cálculo del área de figuras irregulares

Propósito Utilizarás la fórmula del área de figuras conocidas para calcular el área de polígonos o figuras irregulares.

◂ Transitamos

pareja

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

Jacinto es dueño de un terreno y necesita saber cuál es la superficie que ocupa porque quiere venderlo. La imagen muestra una vista área del terreno de Jacinto y sus medidas.

a) Calculen el perímetro del terreno. P= ______

b) ¿Cómo podría Jacinto obtener el área del terreno a partir de la imagen? ______

______

______

______

c) Realicen los trazos necesarios, tomen las medidas que consideren para obtener el área del terreno. A = ______

______

Consideren que cada cm en la imagen representa 10 m del terreno real.

equipo

2. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. ¿Siguieron el mismo procedimiento? ¿Sus resultados son similares? Comenten en grupo las estrategias para calcular el área de figuras irregulares.

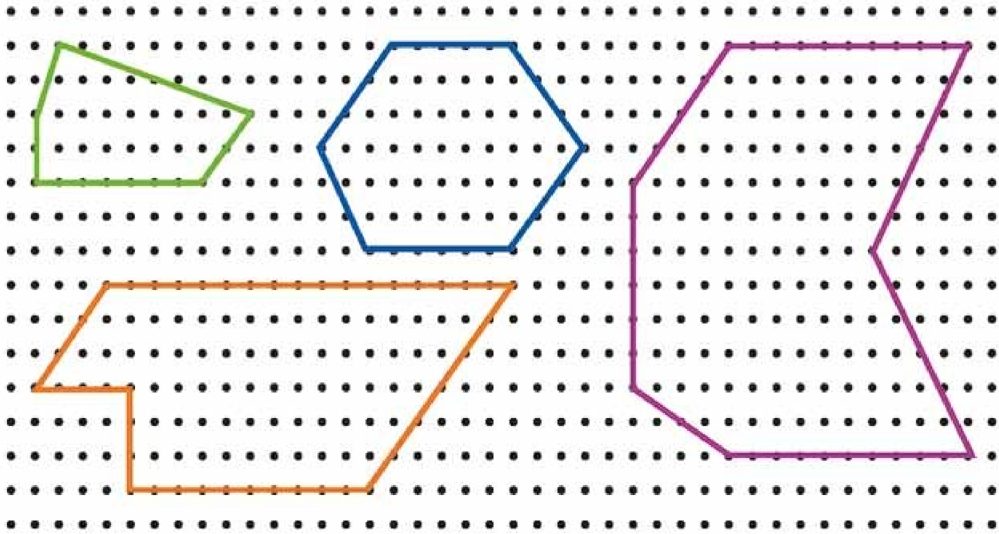
pareja

3. Consideren las siguientes figuras que fueron construidas sobre un geoplano y realicen lo que se pide.

La maestra de Matemáticas le pidió a sus alumnos calcular el área de las figuras, considerando la distancia entre los puntos como una unidad.

Otra vista

El geoplano fue creado por el matemático egipcio Caleb Gatterno en 1960, como un recurso didáctico para enseñar geometría. El geoplano original consistía en un tablero cuadrado de madera con clavos formando una trama.



María comentó que el área de la figura azul se puede calcular dividiéndola en dos triángulos y dos rombos. Karla dice que se pueden dividir en dos trapecios.

a) ¿Quién tiene razón? ______ Realicen los trazos necesarios y calculen el área de la figura. ______

b) ¿Cómo pueden calcular el área de la figura verde? Hagan los trazos necesarios y escriban la medida: ______

4. Calculen el área de las otras figuras. Realicen los trazos correspondientes en las figuras.

Figura anaranjada: ______ Figura morada: ______

a) Su estrategia es única o hay otra forma de dividir las figuras? ______

______

______

b) ¿Hay una fórmula para calcular el área de cada figura? Expliquen su postura.

______

______

equipo

5. Comparen sus resultadois y estrategias con las de otros compañeros. Si sus resultados no coinciden, revisen sus procedimientos en busca de los posibles errores.

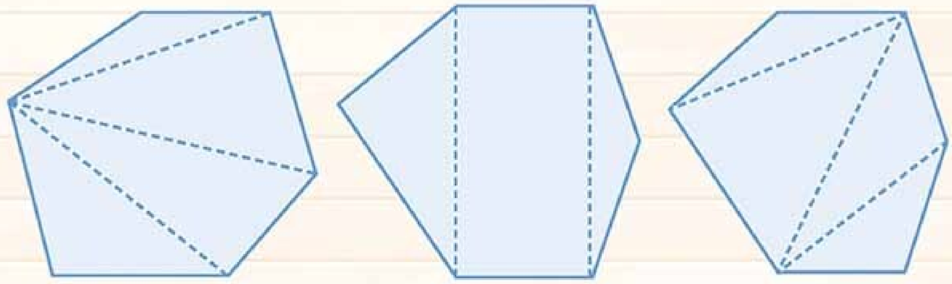
individual

6. Lee la siguiente información. Después, comenta con tus compañeros sobre las estrategias que usaron y la información que se muestra.

Para formalizar

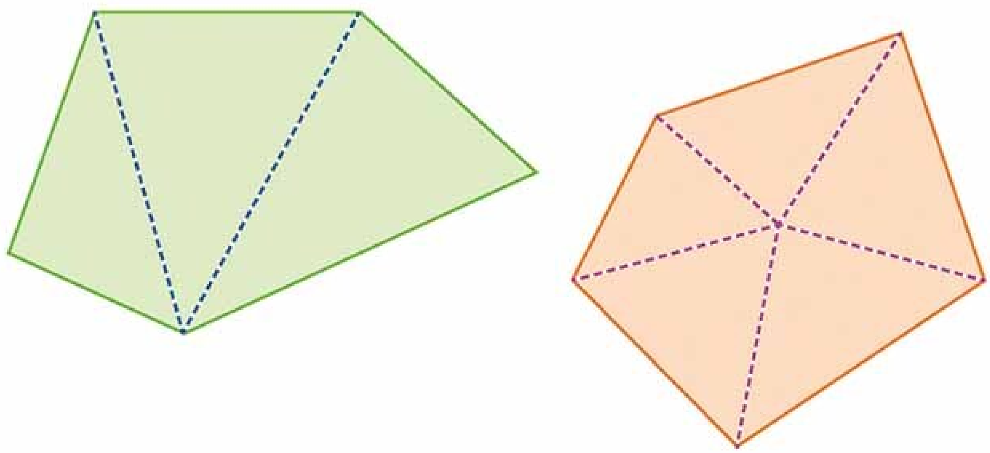
En grados anteriores aprendiste a calcular el área de diferentes figuras geométricas por medio de una fórmula, la cual permite generalizar y calcular el área de cualquier figura semejante. Por ejemplo, sabes que el área de un triángulo se calcula con la fórmula: $\frac{bh}{2}$, o la de un cuadrado: l^2, entre otras.

Cuando se tienen figuras o polígonos irregulares las fórmulas conocidas permiten calcular el área de dichas figuras a partir de dividirlas en figuras cuya fórmula conoces. Se calcula el área de cada figura que se forma y se suman los resultados. Como muestran las siguientes figuras.



Es importante considerar el menor número de figuras posible para que resulten más rápidos y sencillos los cálculos.

7. Analiza cómo fueron divididas las siguientes figuras y resuelve.



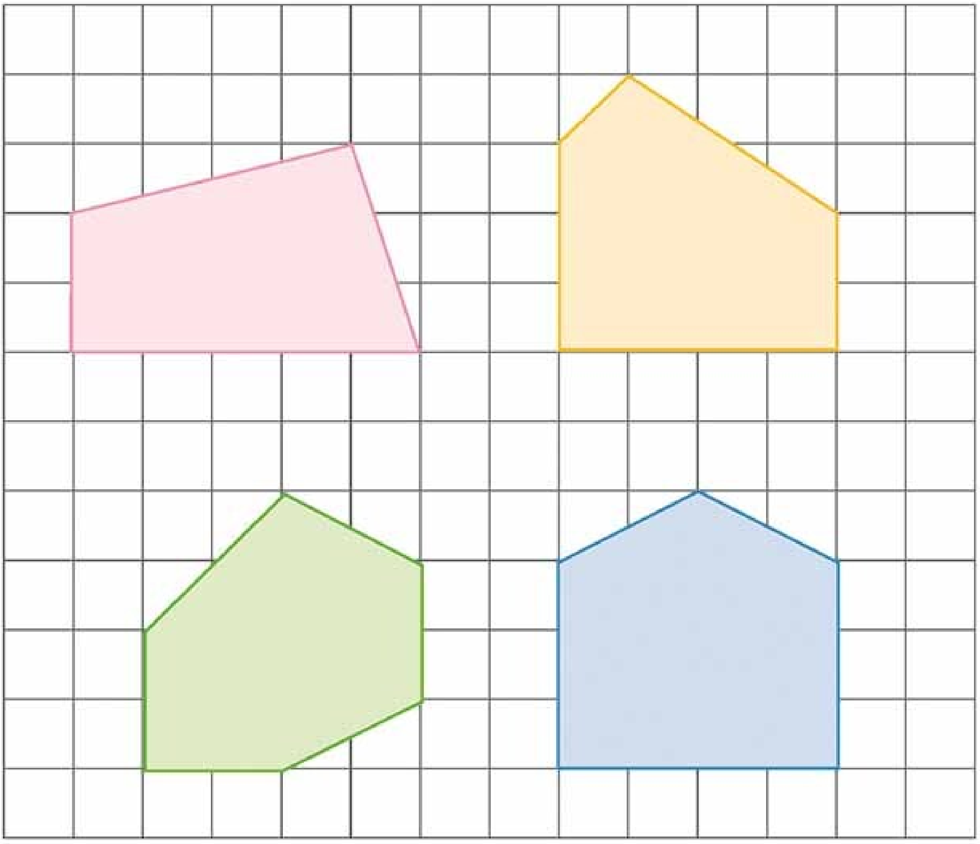
a) ¿En alguna de las figuras las divisiones no permiten calcular con exactitud su área? ¿Por qué? ______________________________

____

____

b) ¿Habrá una forma más sencilla de dividir las figuras? Si así lo consideras, realiza los trazos en ambas figuras.

8. Realiza los trazos, toma las medidas necesarias y calcula el área de las siguienets figuras. Considera que cada cuadrado mide 5 cm de lado.



9. Ximena quiere comprar el siguiente terreno cuyo costo es de $450 por metro cuadrado. Calcula el área del terreno y determina su costo.

1 cm en el dibujo es igual a 3 m en la realidad.

a) Área: ______________ b) Costo: ______________

10. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Si existen diferencias, analicen cada caso, con la idea de detectar dónde cometieron el error para corregirlo. Si es necesario, busquen el apoyo del profesor.

Perímetro y área de polígonos regulares

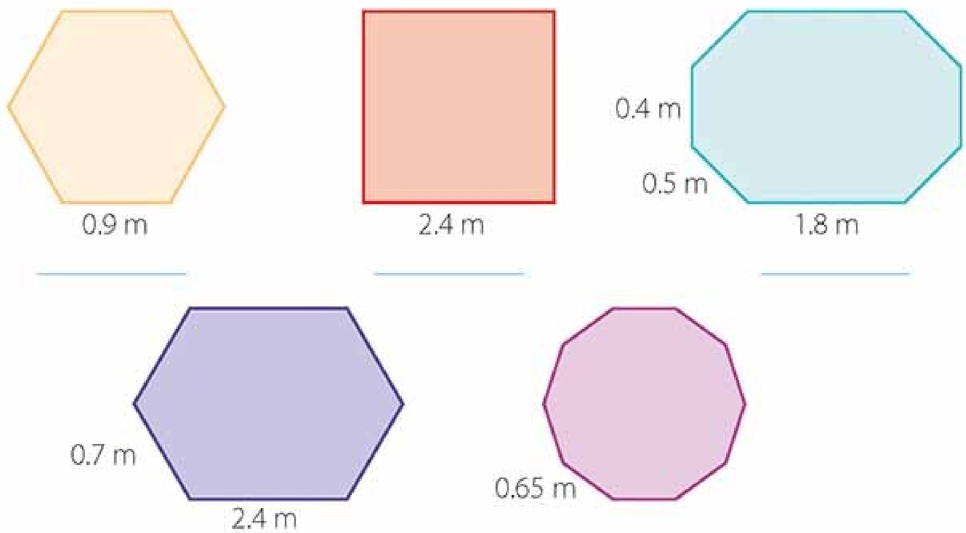
Propósito Deducirás la fórmula para calcular el perímetro y el área de polígonos regulares y la utilizarás para resolver problemas.

pareja

1. Lean la información y resuelvan los siguientes problemas.

Mariana hizo los siguientes manteles y necesita comprar encaje de diferentes colores para adornar el contorno de cada uno.

a) Calcula la cantidad de encaje que necesita en cada caso.



b) ¿En qué casos usaron o se podría usar el mismo procedimiento para calcular el perímetro, que no sea sumando? ______

c) ¿Cómo se calcula el perímetro de un polígono regular? ______

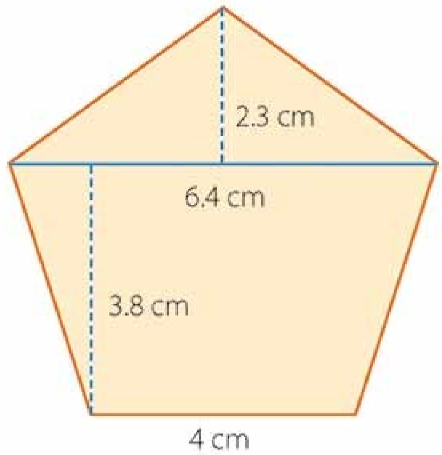
d) Si se conoce el perímetro de un polígono regular, ¿cómo se puede obtener la medida de sus lados? ______

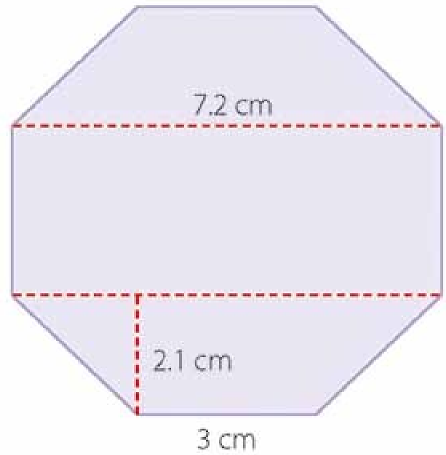
e) ¿Cuál es el perímetro de un pentágono regular cuyos lados miden 17 cm? ______

2. Generalicen y escriban una expresión que permita obtener el perímetro de cualquier polígono regular de *n* lados.

pareja

3. Analiza con un compañero la forma en la que dos estudiantes dividieron los siguientes polígonos regulares y calculen su área.





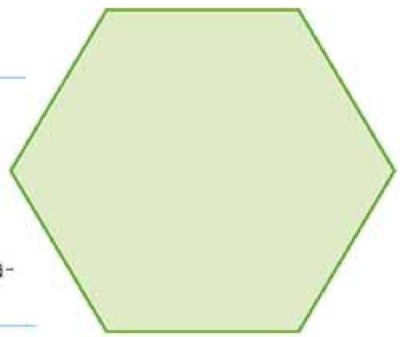
A = ____________   A = ____________

a) ¿Habrá otra manera de calcular el área de cada figura? Si su respuesta es afirmativa, describan el procedimiento. ______________________________

____

b) ¿Cuál es el perímetro de cada figura? ______________________________

4. Tomen las medidas y realicen los trazos necesarios para calcular el área del siguiente hexágono regular.



a) A = ______________________________

b) ¿Cuál es el perímetro? ____________________

____

c) ¿Habrá otra manera de calcular el área del hexágono? Describan cómo. ____________________

____

d) ¿Alguno de sus procedimientos permite calcular el área de otros polígonos regulares de la misma manera? ______________________________

____

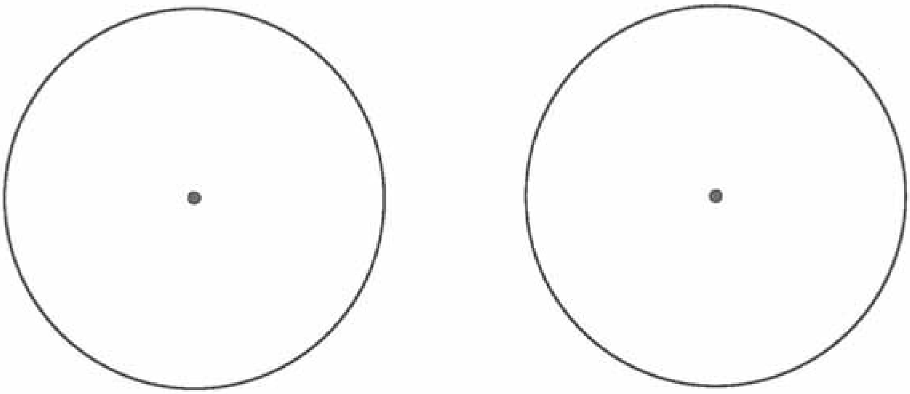
equipo

5. Comenten con otros compañeros los procedimientos usados en la primera actividad y el que ustedes utilizaron en la segunda. Discutan si alguno permite generalizar para obtener una fórmula que sirva para calcular el área de cualquier polígono regular, argumenten sus razones y registren sus conclusiones.

equipo

6. Construyan el polígono inscrito que se indica en cada circunferencia. Regresen a la secuencia 4 para recordar los procedimientos.

Pentágono Octágono



a) Tomen las medidas necesarias y calculen el área de cada polígono.

Pentágono: ____________ Octágono: ____________

b) Describan el procedimiento que siguieron. ________________________________

____

c) En cada polígono tracen un ángulo central. ¿Cuántos ángulos centrales se pueden trazar en cada figura? ________________________________

____

d) ¿Qué figuras se forman al trazar los ángulos centrales? ____________________

7. En cada figura, tracen un segmento perpendicular a uno de los lados desde el centro del polígono. El segmento que acaban de trazar se llama **apotema**.

a) Respecto a las figuras que se forman con los ángulos centrales, ¿qué representa la apotema? ________________________________

____

b) ¿Cómo pueden calcular el área del pentágono a partir de las figuras que se forman con sus ángulos centrales? ________________________________

____

c) ¿Este procedmiento permite calcular el área del octágono? Argumenten su respuesta. ________________________________

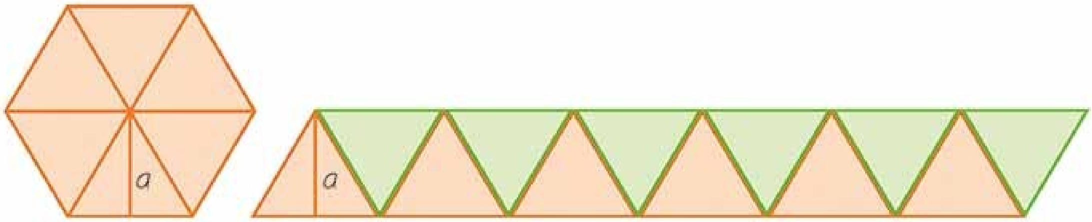
____

8. Calculen nuevamente el área siguiendo este procedimiento y verifiquen si coincide con su procedimiento anterior o si fueron diferentes.

Glosario

Apotema. Segmento perpendicular a los lados de un polígono regular que llega al centro de la figura.

9. Observa cómo descompuso Ana un hexágono regular para calcular su área.



a) Considerando la figura original, ¿qué representa la base del **paralelogramo**?

b) ¿Qué elemento representa la altura del paralelogramo?

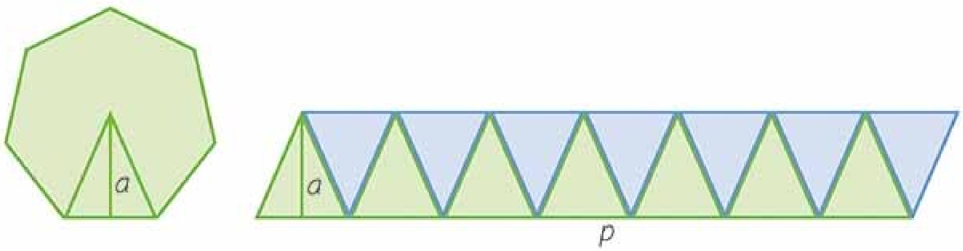
c) ¿Qué parte del paralelogramo representa el hexágono original?

d) Describan cómo calcular el área del hexágono, a partir de lo anterior.

Glosario

Paralelogramo. Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos que miden lo mismo.

10. Observen el siguiente héptagono que se descompuso de una manera similar al hexágono.



a) ¿Cómo se puede obtener *P*?

b) Escriban una expresión que permita calcular el área del heptágono regular a partir de su perímetro (*P*) y del apotema (*a*).

c) ¿Pueden aplicar la misma fórmula para cualquier polígono regular? Justifiquen.

d) Si los lados del heptágono miden 4 cm, calculen *P*:

e) SI la apotema mide 4.1 cm, ¿cuál es el área del heptágono?

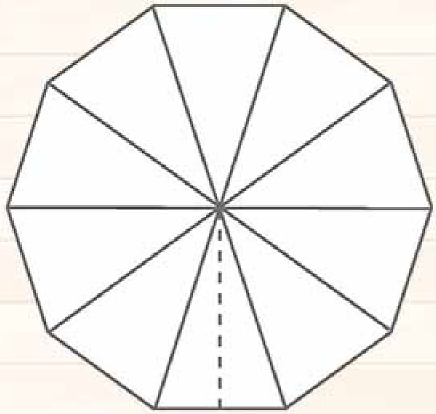
11. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Con el apoyo del profesor validen las fórmulas que establecieron para calcular el área de un polígono regular.

pareja

◂ Para formalizar

12. Lean en parejas la siguiente información. Si tienen dudas, busquen la ayuda de su profesor para resolverlas.

La fórmula para calcular el área de polígonos regulares se puede deducir a partir de dividirlo en *n* número de triángulos desde el centro de la figura, cómo muestra el siguiente decágono regular:

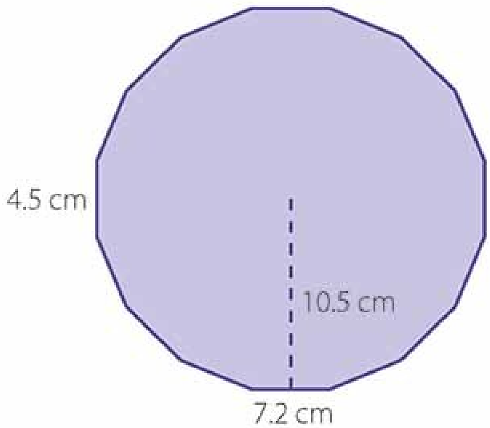


Sabemos que la fórmula para el área de un triángulo es igual a: $\frac{bh}{2}$. Y como el polígono se dividió en 10 triángulos iguales, en este caso, basta con multiplicar el área de cada triángulo por 10, es decir, $10 \times \frac{bh}{2}$.

La expresión anterior es equivalente a: $\frac{10bh}{2}$, donde 10*b*, representa el perímetro del polígono.

Por tanto, si llamamos P al perímetro de cualquier polígono regular y *a* a su apotema, la fórmula general para el área de un polígono rtegular es: $A = \frac{Pa}{2}$.

13. Apliquen la fórmula y calculen el área de los siguientes polígono regulares.



P = ____________ P = ____________

A = ____________ A = ____________

a) ¿Cuál es el área de un pentágono regular cuyos lados miden 9.2 cm y su apotema mide 6.3 cm? ____________

b) ¿Cuál es el área de un dodecágono regular cuyos lados miden 8 cm y su apotema mide 14.9 cm? ____________

Consulta en...

Ingresa a: https://www.vitutor.com/geo/eso/ar_4e.html y resuelve los ejercicios interactivos sobre el cálculo del área de figuras irregulares y de polígonos regulares.

Ponlo en práctica

individual

14. Lee la información y resuelve.

La imagen representa una cabaña con forma de octágono regular que Antonio construyó en su jardín, a la cual necesita cambiarle el piso porque ya se dañó.

Los lados de la cabaña miden 2.6 m y su apotema 3.13 m.

a) Si la madera para el piso la venden en cajas que cubren 1.8 m^2, ¿cuántas cajas necesita comprar para cubrir todo el piso, considerando un desperdicio por caja de 0.1 m^2? ____________________

____

b) ¿Cuánto material le sobrará, considerando el desperdicio por caja? ____________________

____

15. La siguiente imagen corresponde al logotipo de un compañía de seguros. La compañía mandó a hacer pegatinas de diferente tamaño para regalar a sus clientes, como parte de su nueva campaña publicitaria.

En mi entorno

Los polígonos regulares son inspiración de muchas diseñadores y podemos encontrarlos en logotipos de diferentes marcas, como muestra. ¿Conoces algún logotipo hecho con polígonos regulares? ¿Te atreverías a hacer tu propio diseño?

Anota el área de cada pegatina, a partir de las medidas que se muestran.

Pegatina	Lados (cm)	Apotema (cm)	Área (cm^2)
1	4	3.4	
2	7.5	6.5	
3	10.8	9.3	
4	12.5	10.8	

16. Responde.

a) El área de un decágono regular mide 1 203.12 cm^2. Si sus lados miden 12.5 m, ¿cuánto mide su apotema? ____________________

____

b) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuya área mide 440.59 cm^2, sus lados 11 cm y su apotema 11.4 cm? ____________________

____

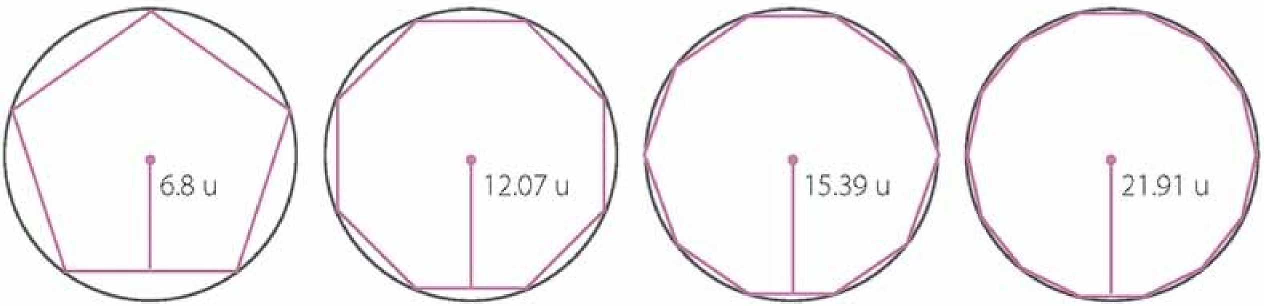
Área del círculo

Propósito Deducirás la fórmula para calcular el área del círculo y la utilizarás para resolver problemas.

pareja

1. Observa junto con un compañero los siguientes polígonos que se trazaron inscritos en una circunferencia y resuelvan las actividades.

5 lados | 8 lados | 10 lados | 14 lados



Radio = 8.5 u | Radio = 13 u | Radio = 16.18 u | Radio = 22.4 u

a) Anoten el área y el perímetro de cada polígono, consideren que los lados miden 10 cm en todos los casos.

Polígono	Perímetro (u)	Área (u^2)
Pentágono		
Octágono		
Decágono		
Tetradecágono		

b) ¿Cuál es el perímetro de cada círculo? Consideren $\pi = 3.14$. ____________

c) ¿En qué caso el perímetro se parece más al del polígono correspondiente?

____

d) ¿En qué caso el polígono se asemeja más al círculo que lo circunscribe? ____________

e) ¿Qué sucede entre el radio y la apotema entre más lados tiene el polígono?

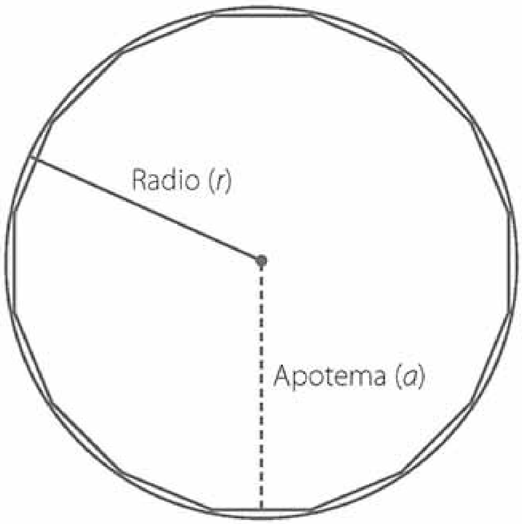
____

equipo

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan si es posible establecer una forma de calcular el área de un círculo a partir de la fórmula de un polígono regular. ¿Cómo lo harían? Registren sus acuerdos en su cuaderno.

equipo

3. Consideren el siguiente polígono de 16 lados que se trazó inscrito en la circunferencia y resuelvan.



a) ¿Qué expresión o fórmula permite obtener el área del polígono: ______

b) ¿Qué sucede entre el radio y la apotema entre más lados tiene el polígono? ______

______

4. Calculen el área del polígono, según se indica. Después, de manera análoga calculen el área del círculo.

a) Si los lados del polígono miden 5 cm, ¿cuánto mide su perímetro? ______

______

b) Si el radio vale 12.8 cm, ¿cuál es el perímetro del círculo? ______

c) Si $a = 12.6$, ¿cuál es el área del polígono? ______

d) Según lo anterior, ¿cuál sería el área del círculo? Describan como la obtuvieron.

______

______

5. Utilicen la fórmula para el área de un polígono regular, con los elementos del círculo para validar lo anterior.

a) ¿Qué expresión permite obtener el perímetro (P) del círculo, a partir del radio (r)?

______

b) Completen la fórmula del polígono: $\frac{Pa}{2}$, a partir de la expresión anterior y el radio:

______

c) Simplifiquen la expresión anterior: ______

d) Calculen el área del círculo a partir de la expresión anterior. ______

______

e) ¿Coincide con el resultado que obtuvieron antes? ______

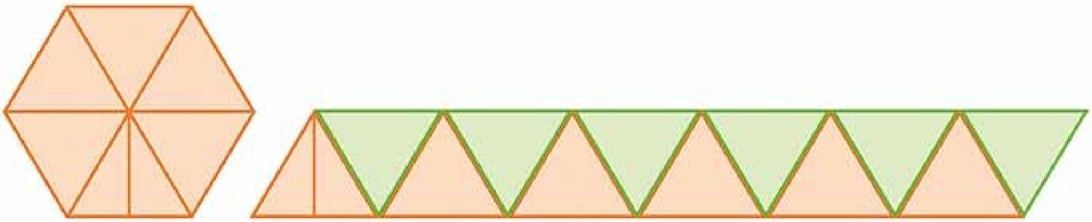
______

______

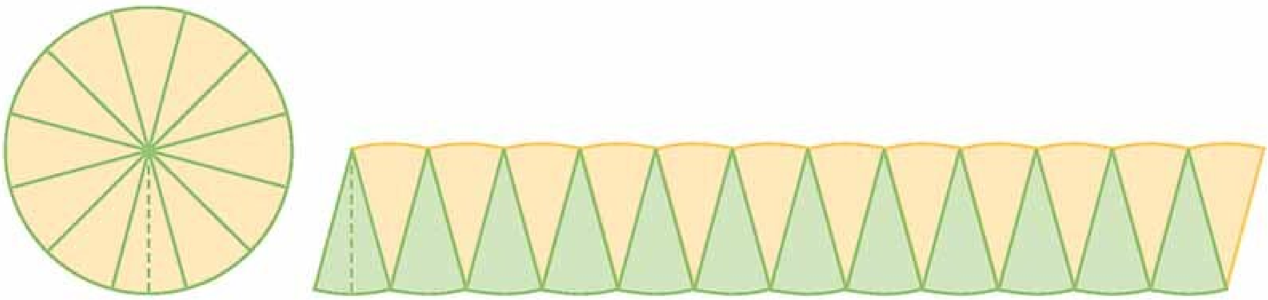
6. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Verifiquen si este procedimiento permite generalizar y calcular el área de cualquier círculo.

pareja

7. En la lección anterior dividiste polígonos regulares en paralelogramos para deducir la fórmula para calcular su área, como se muestra:



Utilicemos esa analogía pero ahora en el círculo como muestra la siguiente figura, que se formó con dos sectores circulares del mismo tamaño, a la base del paralelogramo se le llamó *P* y a la altura *r*.



a) Describan cómo se obtiene el área del paralelogramo al que se asemeja la figura que se formó. ________________________________

b) ¿Qué elemento de la circunferencia original representa la base del paralelogramo? ________________________________

c) ¿Qué elemento representa su altura? ____________________

d) Si $r = 7$ cm, ¿cuánto mide la base del paralelogramo? ____________________

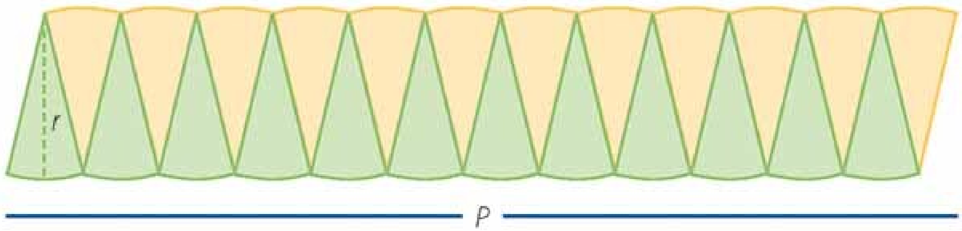
e) ¿Cuál es el área del paralelogramo? ____________________

f) ¿Cuál es el área del círculo original? ____________________

g) Calculen el área del círuclo considerando que el radio mide 3 cm. Escriban las operaciones. ____________________

8. Describan con palabras cómo calcular el área de un círculo a partir de lo visto en la actividad. ________________________________

9. Realicen las siguiente actividad para justificar algebraicamente el procedimiento que desarrollaron en la sección anterior, a partir del siguiente paralelogramo, cuya base mide P y si altura r, como se observa.



a) Escriban la fórmula para obtener el área del paralelogramo, en función de P y r:

____

b) ¿Cómo quedaría la fórmula anterior para el área de un solo círculo? __________

c) Escriban la fórmula para obtener P, en función del radio de círculo: $P =$ __________

d) ¿Cómo quedaría la expresión del inciso b, utilizando la expresión del inciso anterior? Simplifiquen la expresión: ____________________

e) Describan con palabras cómo quedó la fórmula simplificada: ________________

f) ¿Coincide la expresión con el procedimiento que siguieron en la activdad anterior?

____

____

g) Si $r = 5$, ¿cuánto mide P? ____________________

h) ¿Cuál es el área del paralelogramo que se formó? ________________

i) Calculen el área de uno de los círculos a partir de la fórmula del inciso d.

A = ______________________________

10. Calculen el área de los siguientes círculos a partir de la fórmula. Escriban el procedimiento.

Círculo	Radio (cm)	Área (cm^2)
1	4.8	
2	7.4	
3	11.2	

grupo

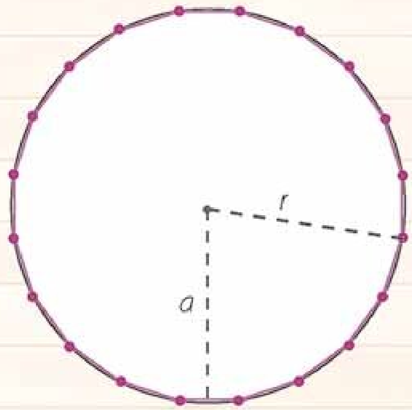
11. Validen su fórmula con las analogías propuestas y corroboren que en todas obtienen el mismo procedimiento. Compartan sus resultados con el grupo y con el profesor, si existen diferencias discútanlas para llegar a acuerdos. Registren en su cuaderno la fórmula general para calcular el área un círculo.

pareja

12. Lean en pareja la siguiente información.

◂ Para formalizar

La fórmula para calcular el área de un polígono regular permite deducir la fórmula del área de un círculo, debido a la similitud que adquieren cuando se traza un polígono regular de muchos lados, inscrito en una circunferencia, como se muestran los siguientes trazos, donde se aprecia lo parecido que son las áreas y el apotema con el radio.



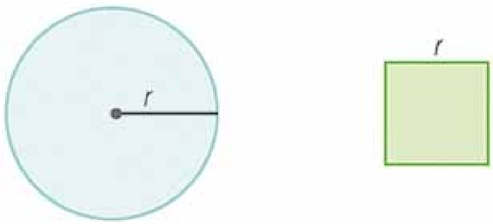
Así podemos obtener el área de un círculo, multiplicando el perímetro por el radio y dividiendo el resultado entre dos, es decir:

$$A = \frac{P \times r}{2}$$

Sabiendo que el perímetro de un círculo es igual a pi por diámetro (d) y como; $d = 2r$, entonces, $P = 2\pi r$: de lo anterior se puede obtener la fórmula para el área del círculo de la siguiente forma:

$$A = \frac{P \times r}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$$

13. Analicen los siguientes círculo y cuadrado y resuelvan.



a) ¿Qué relación hay entre el cuadrado y el círculo? ____________________________

b) Justifiquen algebraicamente cuántas veces cabe el área del cuadrado en el área del círculo. ____________________________

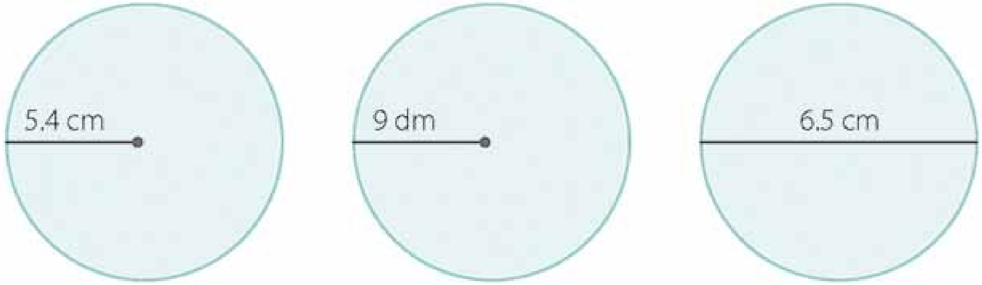
c) Si $r = 1$, ¿cuál es el área de cada figura? ____________________________

d) Asignen otros valores para r y verifiquen si en todo los casos se cumple la misma relación.

e) ¿Qué valor representa las veces que cabe el área del cuadrado en un círculo cuyo radio mide lo mismo que los lados del cuadrado. ____________________________

Ponlo en práctica

14. Calcula el perímetro y el área de los siguientes círculos.



P = ______ P = ______ P = ______

A = ______ A = ______ A = ______

Consulta en...

Ingresa a: https://www.vitutor.com/geo/eso/ac_5e.html Para resolver los problemas interctaivos relacionados con los temas de esta secuencia.

15. Resuelve.

a) Si el diámetro de un círculo mide 17 cm, ¿cuánto mide su área? ______

b) ¿Cuál es el área de un círculo de radio 26 cm? ______

c) Si el área de un círculo mide 55.3896 m^2, ¿cómo puedes determinar su perímetro?

______

d) ¿Cuál es el perímetro del círculo? ______

e) ¿Cuánto mide el radio de un círculo cuya área mide 31.4 m^2? ______

16. Se quiere colocar un carrusel en una superficie circular. El área de la base del carrusel mide 50.24 m^2. Por seguridad, se requiere que el espacio donde se va a colocar tenga 1.2 m sobre el perímetro del carrusel, como se muestra.

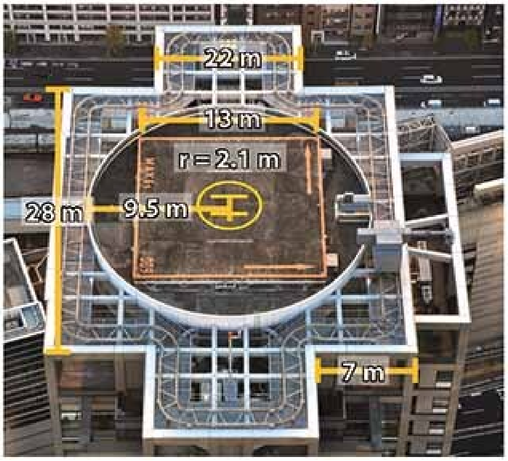
a) ¿Cuál es el diámetro del carrusel? ______

b) ¿Cuánto mide el área donde se colocará el carrusel? Explica tu respuesta. ______

individual

1. La imagen muestra el helipuerto que se encuentra en la azotea de cierto edificio. Calcula el área del siguiente terreno. El círculo central señalado con la letra H, representa el lugar en el que deben aterrizar los helicópteros y su radio mide 2.1 m.

◂ Integramos



Consideren las medidas y calculen lo que se pide.

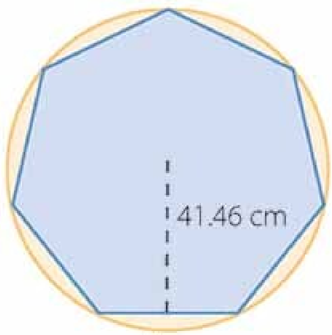
a) ¿Cuál es el área total de la azotea? ______

b) ¿Cuál es el área del círculo central que no ocupa el cuadrado? ______

c) ¿Cuál es el área destinada al aterrizaje de un helicóptero de 13 m?? ______

2. La siguiente figura se trazó en una cartulina con las medidas que se muestran. El radio de la circunferencia mide 46.1 cm.

Si se recorta el heptágono, ¿qué superficie de la cartulina se desperdicia? ______



3. Resuelve.

a) ¿Cuál es el área un octágono regular cuyos lados miden 15 cm y su apotema 18.1 cm? ______

b) Si el área de un dodecágono regular mide 715.2 cm^2 y su apotema mide 14.9 cm, ¿cuánto miden sus lados? ______

c) Si el área de un cuadrado mide 50 cm, ¿cuál es el área de un círculo cuyo radio mide lo mismo que los lados del cuadrado? ______

Aprendizaje esperado:
Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

Volumen de prismas y cilindros

Exploramos ▸ Área y volumen

individual

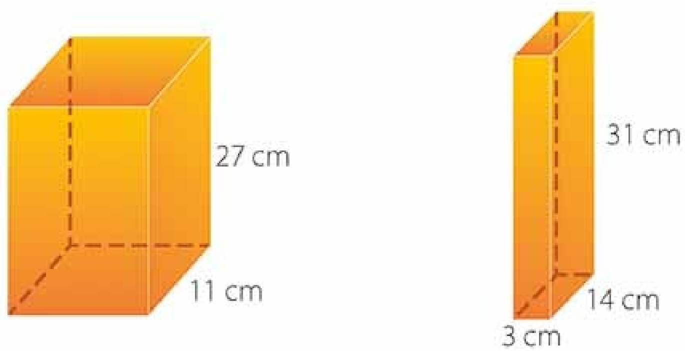
1. Andrea trazó los siguientes polígonos regulares y tomó las medidas para calcular su área. Realiza los cálculos y determina qué polígono tiene mayor área.

a) ¿Qué polígono tiene mayor área? ____________

b) ¿Cuál tiene menor área? ____________

c) ¿Cuál es el área de otro polígono? ____________

2. Calcula el volumen de los siguientes prismas.



V = ________ V = ________

a) ¿Qué procedimiento seguiste para calcular el volumen de cada prisma? ____________

b) ¿Cambia el procedimiento de acuerdo con la forma de la base? ____________

c) ¿Qué relación hay entre la base y la altura de cada prisma? ____________

pareja

3. Comparte tus respuestas con un compañero y digan si están de acuerdo o no con el procediento que siguieron.

Volumen de prismas rectos

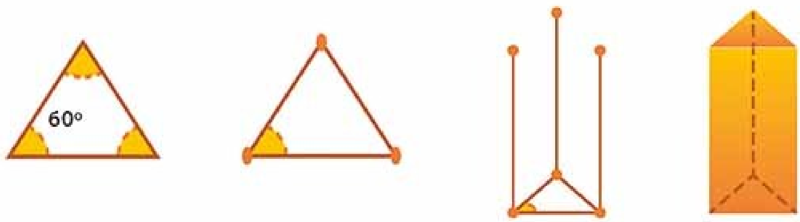
Propósito Deducirás la fórmula para calcular el volumen de prismas rectos con base poligonal y resolverás problemas al respecto.

Transitamos

pareja

1. Resuelvan los siguientes problemas.

Ivonne trabajó con popotes reciclables para construir diferentes polígonos regulares para presentarlos en una exposición escolar. Ella tiene que mostrar el nombre de cada prisma y la medida de su volumen.
Primero dibujó la base en un hoja y, a partir de ella, construyó los prismas, como muestra la siguiente secuencia de imágenes:



a) ¿Qué tipo de triángulo forma la base del prisma? ______

b) El triángulo mide 6 cm por lado y su altura es de 5.2 cm. Si la altura del prisma es de 9 cm, ¿Cuál es el volumen del prisma? ______

c) Describan el procedimiento que siguieron para calcular el volumen del prisma.

______

2. Ivonne aprovechó el prisma anterior para construir otro prisma, agregando prismas iguales.

a) ¿Cuál de los siguientes prismas construyó a partir del anterior? Argumenten.

______

b) ¿Qué elemento del triángulo representa la apotema del polígono? ______

c) ¿Cuál es el volumen de dicho prisma? ______

d) ¿Cómo lo obtuvieron? ______

equipo

3. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Verifiquen el procedimiento que siguieron para calcular el volumen del prisma triangular y cómo lo usaron para obtener el volumen del prisma hexagonal. Comenten cómo podrían calcular el volumen de los otros prismas, ¿qué medidas necesitan conocer?

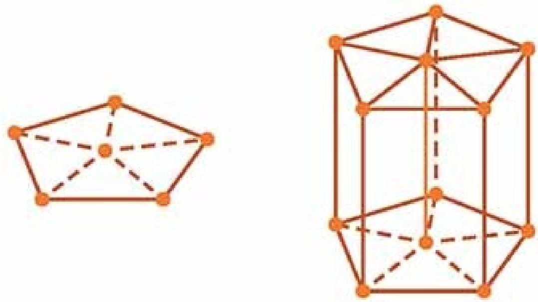
En mi entorno

En México se consumen, aproximadamente, 17 000 popotes diarios, de los cuales 95% no son reciclables.
El uso del popote afecta sensiblemente al medio ambiente y daña diversos ecosistemas y a muchos animales (se estima que un millón de aves marinas y 100 000 mamíferos y tortugas mueren al año por ingesta de plásticos

equipo

4. Continúen trabajando con los prismas de Ivonne y resuelvan las siguientes actividades.

Para hacer cada prisma, Ivonne primero construyó los polígonos de la base a partir de su ángulo central, como se muestra:



a) ¿Cuál es el nombre del prisma? ______________________

b) ¿Cómo podrían determinar el volumen del prisma, a partir de la construcción de Ivonne? ______________________

c) Si los lados del prisma miden 8 cm, la apotema 5.5 cm y el largo de los popotes de las caras laterales miden 10 cm, ¿cuál es el volumen del prisma? __________

d) ¿Podrían usar este procedimiento para calcular el volumen de otros prismas cuya base es un polígono regular ______________________

grupo

5. Discutan su postura con la de otros compañeros en busca de un procedimiento que permita calcular el volumen de cualquier prisma recto. Escriban el procedimiento que hayan acordado. ______________________

____

6. Ayuden a Ivonne a llenar la etiqueta de los prismas que construyó. Apliquen su procedimiento para calcular el volumen.

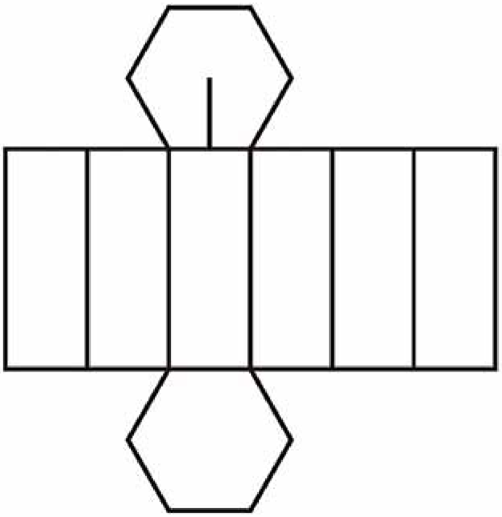
Prisma __________ Lado: 8; Apotema: 8.3 Altura: 17 Volumen: __________	Prisma __________ Lado: 10; Apotema: 12.1 Altura: 9 Volumen: __________	Prisma __________ Lado: 7; Apotema: 10.7 Altura: 11 Volumen: __________

pareja

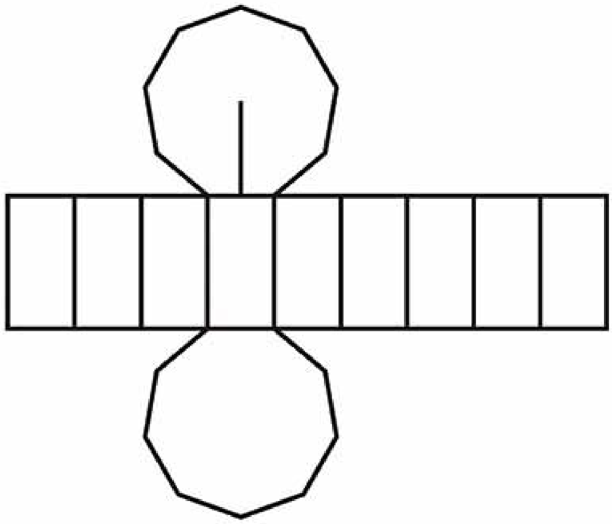
7. Trabajen en parejas en la solución de las siguiente actividades.

Emmanuel, un compañero de Ivonne, decidió construir sus polígonos en cartulina. Para ello, primero trazó los desarrollos planos que se muestran.

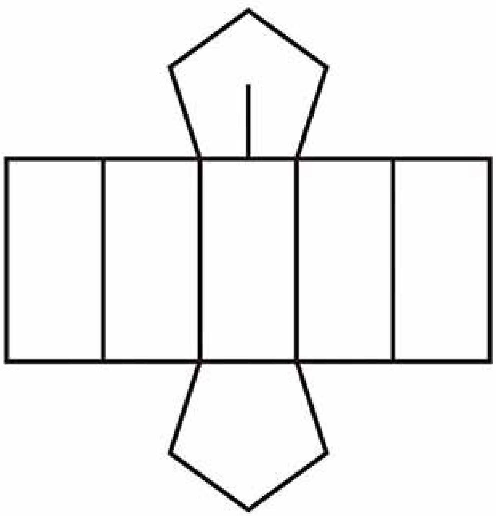
Prisma 1



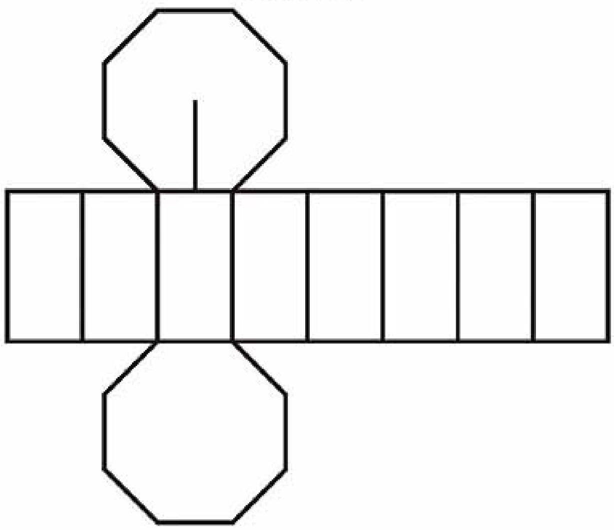
Prisma 2



Prisma 3



Prisma 4



a) ¿Podrían determinar el volumen de los prismas a partir de los desarrollos planos? ¿Cómo? ______________________________

____

b) Si conocen las medidas de la base de un prisma, ¿qué información les faltaría para conocer su volumen? ______________________________

____

c) ¿Qué elemento del desarrollo plano da la información anterior? ______________________________

____

8. Lee la siguiente información para validar los acuerdos de grupo. Si tienes dudas, extérnalas al profesor para que les ayude a aclararlas.

Prisma	Nombre	Lado de la base (cm)	Apotema (cm)	Altura (cm)	Volumen (cm^3)
1		4	3.4	8	
2		4	5.4	8	
3		6	4.1	12	
4		5	6	10	

a) Si dividen el volumen por la altura del prisma, ¿qué medida representa el resultado? ____________________

b) ¿Es posible establecer el volumen de un prisma a partir del área de su base? Argumenten su postura. ____________________

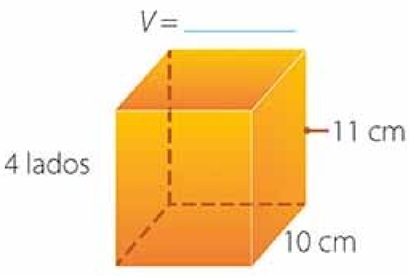
c) Si se modifica la altura de cualquiera de los prismas, por ejemplo al doble, ¿qué sucede con el volumen? ____________________

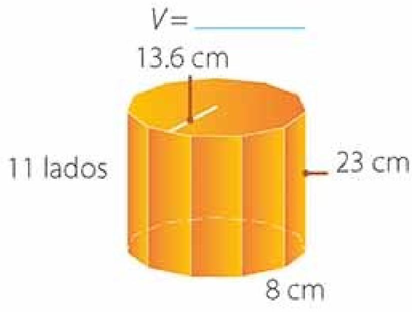
grupo

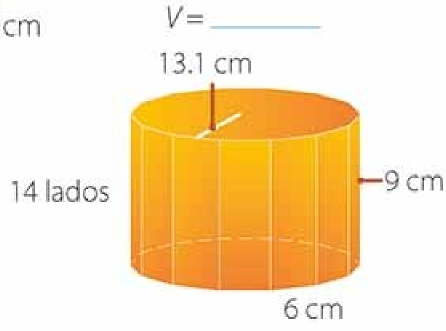
9. Con la guía de su profesor, comparen sus resultados y estrategias con las de otros compañeros. Juntos establezcan una fórmula para calcular el volumen de cualquier prisma recto. Construyan los prismas de Emmanuel, a partir de los modelos de la página anterior y las medidas de la tabla y validen sus respuestas, usando la fórmula que establecieron.

individual

10. Los siguientes polígonos representan los prismas que construyó Hilda para la exposición escolar. Completa los datos que faltan en las etiquetas correspondientes.







pareja

Para formalizar

11. Reúnete con un compañero y realicen una lectura comentada del siguiente texto.

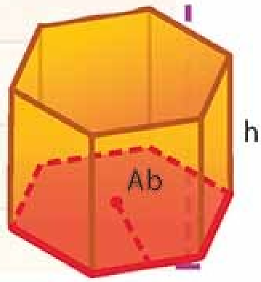
Los prismas rectos son cuerpos geométricos que tienen dos bases paralelas y caras laterales rectangulares que son perpendiculares a las bases.

El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo y se mide en unidades de longitud cúbicas (u^3), la unidad principal para el volumen es el metro cúbico (m^3).

Como sabes, para calcular el volumen de un prisma rectangular se multiplica: largo × ancho × alto. Lo anterior es igual a:

área de la base (A_b) × altura (h), es decir, $V = A_b \times h$.

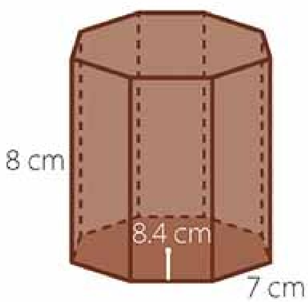
Esta fórmula se puede generalizar para cualquier tipo de prisma recto, como el caso de los trabajados en esta lección, cuya base es un polígono regular.

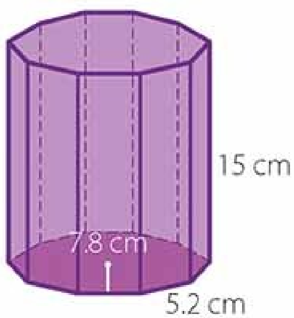


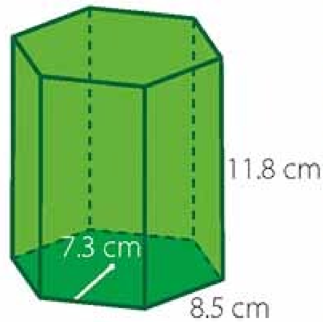
individual

Ponlo en práctica

12. Calcula el volumen de los siguientes prismas rectos.







$V =$ ____________ $V =$ ____________ $V =$ ____________

13. Resuelve.

a) Si el volumen de un prisma mide 8.55 m^3 y el área de su base mide 7.125 m^2, ¿cuánto mide su altura? ____________

b) El área de la base de un prisma pentagonal mide 61.95 cm^2 y su altura es 9 cm. ¿Cuál es su volumen? ____________

c) Si se duplica la altura y se mantiene la misma base, ¿cuál es el volumen del prisma anterior? ____________ ¿Y si se reduce la altura a 3 cm? ____________

d) El volumen de un prisma dodecagonal es de 548.3 dm^3 y su altura mide 4 dm. Si se quiere tener un prisma con un volumen 1.5 veces mayor, que tenga la misma altura, ¿cuánto debe medir el área de la base del nuevo prisma? ____________

Volumen de cilindros

Propósito Deducirás la fórmula para calcular el volumen de cilindros y resolverás problemas al respecto.

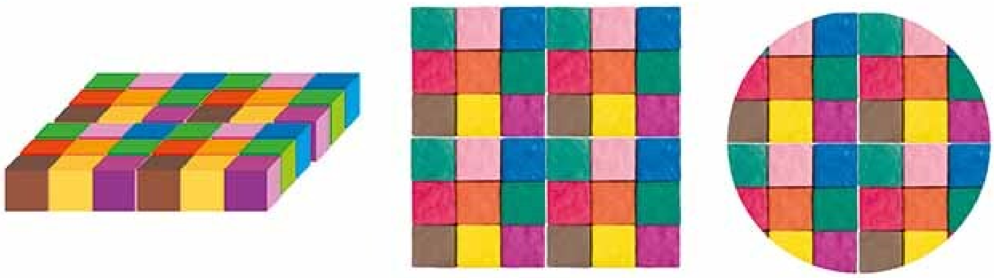
Transitamos

pareja

1. Resuelvan, resuelvan el siguiente problema.

Elena le regaló a su hijo pequeño un juego de plastilinas de colores con algunas piezas para cortarlas, como las que muestra la imagen.

Después de formar cubos, los acomodó formando un cuadrado y, con la pieza circular, cortó los cubos para obtener la figura que muestra la secuencia de imágenes:



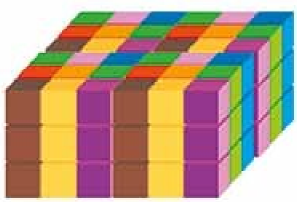
a) ¿Cuántas unidades cúbicas forman la figura orginal? ______

b) Si los cubos miden 5 cm por lado, ¿cuál es el volumen de la construcción?

______

c) Aproximadamente, ¿cuántas unidades cúbicas forman el prisma circular? Expliquen cómo lo determinaron.

______



d) Si a la figura original le aumenta dos pisos, como muestra la imagen, ¿cuál será su volumen en unidades cúbicas? ______

e) Si se realiza lo mismo como el prisma circular, ¿qué forma tendrá el cuerpo geométrico que se genera? ______

f) Aproximadamente, ¿cuál será el volumen del prisma circular de tres pisos? ______

g) ¿Y de un prisma circular de 5 pisos? ______

h) ¿Cómo pueden obtener el volumen para cualquier número de pisos? ______

______

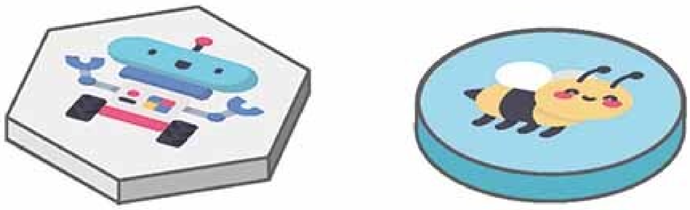
equipo

2. Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Comenten la relación que hay en el método para calcular el volumen de un cilindro con el que obtuvieron en la lección anterior para prismas poligonales.

pareja

3. Resuelvan el siguiente problema.

Santiago tiene una colección de cartones con forma hexagonal y circular, conocidos como "tazos", de sus personajes favoritos de dibujos animados, como los que se muestran.

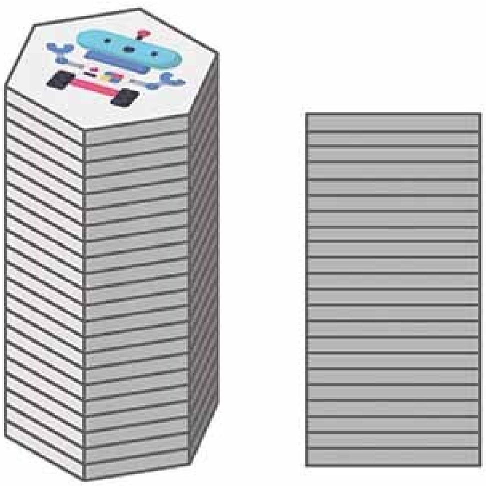


a) Los lados del hexágono miden 3 cm y su apotema mide 2.7 cm,, ¿cuánto mide el área de cada tazo? ______

b) Si el radio de círculo mide 4 cm, ¿cuánto mide el área de cada tazo? ______

______

Santiago fórmo una torre con los 22 tazos poligonales, como se muestra.



c) ¿Qué forma tiene el cuerpo que se genera con los hexágonos? ______.
¿Y con los círculos? ______

d) Si cada tazo tiene 2 mm de grosor , ¿cuál es el volumen del prisma? Describan su procedimiento. ______

______

e) ¿Cómo pueden determinar el volumen del cuerpo que se genera con los tazos circulares? ¿Cuál es el volumen de la construcción de 22 tazos? ______

______

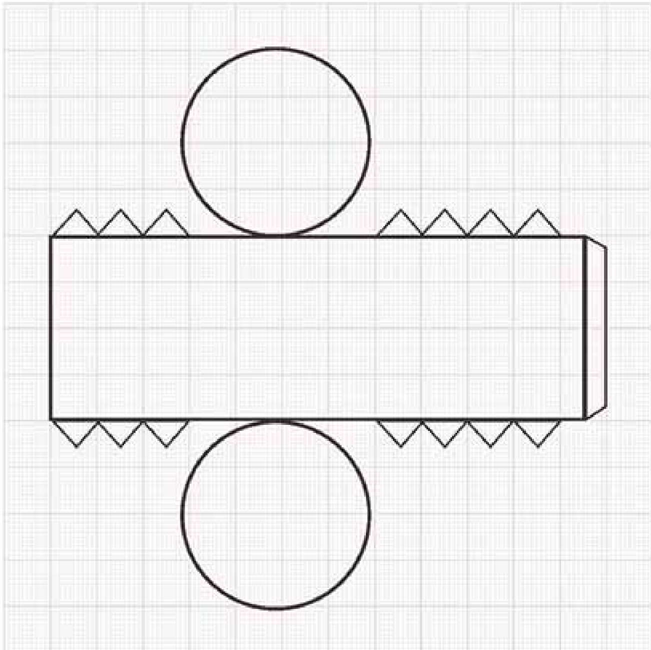
f) Si forma una torre con 45 tazos circulares, ¿cuál es su volumen?______

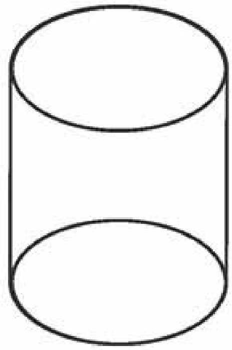
4. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. En grupo propongan un procedimiento para calcular el volumen de un cilindro.

pareja

5. Analicen la información y resuelvan las siguientes actividades.

Fernanda trazó sobre una hoja cuadriculada el desarrrollo plano para construir un cilindro.





a) ¿Qué procedimiento permite calcular el volumen del cilindro que se forma?

____

____

b) De acuerdo con el trazo de Fernanda, ¿cuántas unidades cuadradas miden los círculos que representan la base del cilindro? _______________

c) ¿Qué información faltaría para obtener el volumen del prisma? ___________

d) ¿Qué elemento del desarrollo plano representa esa información? __________

____

e) ¿Qué representa el largo del rectángulo en el cilindro? _______________

____

f) ¿Cuántas unidades cúbicas mide el cilindro de Fernanda? _______________

g) Tomen las medidas necesarias, en centímetros, y calculen el volumen del cilindro.

V = ____

h) Describan un procedimiento para calcular el volumen de un cilindro.

6. Comparen sus respuestas y procedmientos con los de otros compañeros. En grupo establezcan una fórmula para calcular el volumen de un cilindro. Validen su fórmula con su profesor.

individual

7. Apliquen la fórmula que establecieron y calculen el volumen de los siguientes objetos.

Objeto	Radio	Altura	Volumen
Termo	4.5 cm	12.5 cm	
Tambo	35 cm	1.3 m	
Caja de galletas	16 cm	6 cm	
Pila	7 mm	4.8 cm	
Vela	3.5 cm	14 cm	

pareja

8. Lee la siguiente información y coméntala con un compañero. Si tienen dudas, coméntenlas a sus compañeros y al profesor para aclararlas.

◂ Para formalizar

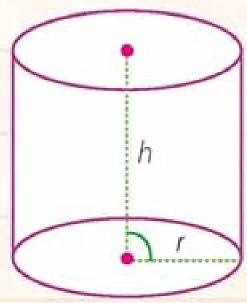
En la secuencia anterior relacionaste el procedimiento y la fórmula para calcular el área de un polígono regular $\frac{Pa}{2}$, con la del círculo.

De la misma manera, estas fórmulas se relacionen con la de prismas poligonales y del cilindro.

La fórmula para calcular el volumen de un cilindro se obtiene de la misma forma que la fórmula del volumen de prismas poligonales rectos, y es igual al área de la base por su altura.

Si llamamos h a la altura del cilindro y r al radio de su base, entonces el volumen V del cilindro está dado por la fórmula:

$V = \pi r^2 h$, que es igual a: $V = Ab \times h$



Ponlo en práctica

individual

9. Responde.

a) Si se conoce el volumen y base de un cilindro, ¿cómo se determina la medida de su altura? ______

b) Si se conoce el volumen y la altura, ¿cómo se determina la medida del radio de la base? ______

Consulta en...

Ingresa al sitio de Internet: https://goo.gl/7S91EJ y resuelve los ejericicios sobre el cálculo del volumen de cilindros.

10. Considera sus respuestas y completa la siguiente tabla. Utiliza 3.14 para pi.

Cilindro	Radio (cm)	Altura (cm)	Volumen (cm^3)
1	5.2		679.2448
2		13.5	2077.11
3	0.8	2.5	
4	1.8		50.868
5		20	6 155.028

11. Resuelve los problemas.

a) Marcela prendió una vela con forma de cilindro de 4 cm de radio y 15 cm de alto.

- Si después de apagarla la vela tenía un volumen de 527.52 cm^3, ¿cuántos centímetros se desgastó? ______
- ¿Qué volumen de la vela se perdió? ______

b) Si se construye el desarrollo plano de un cilindro y el rectángulo que representa las caras laterales mide 37.68 cm de largo y 8 cm de alto, ¿cuál es el volumen del cilindro? Describe como obtuviste la respuestas. ______

______

______

grupo

12. Entre todo el grupo y con la coordinación de su profesor, pongan a consideración sus respuestas. Justifíquenlas mostrando a sus compañeros las operaciones que hicieron para responder cada problema.

Volumen y capacidad

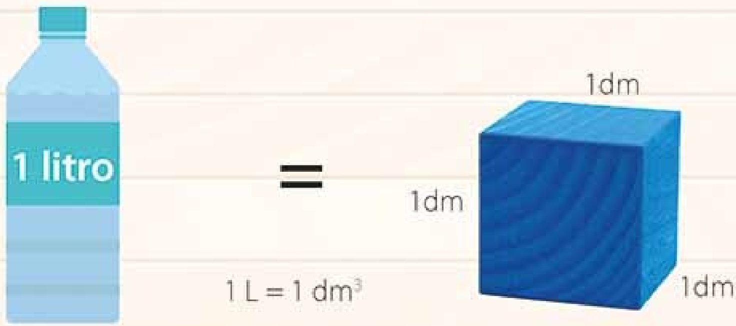
Propósito Resolverás problemas relacionados con unidades de volumen y de capacidad.

Para formalizar

pareja

1. Resuelvan los siguientes problemas.

Como debes recordar, entre las unidades de volumen y capacidad hay una estrecha relación. Muchos objetos tienen volumen, pero no tienen capacidad. Un litro es equivalente a un cubo cuyas aristas miden 1 dm por lado:



a) ¿Cuántos centímetros cúbicos equivalen a un litro? ____________

b) ¿A qué medida de capacidad es equivalente 1 cm^3? ____________

2. Lean la información y resuelvan.

La siguiente imagen muestra una cisterna que se encuentra a 35% de su capacidad, la altura que se muestra es el punto más alto que alcanza el agua al llenarse.

a) ¿Cuál es la capacidad máxima de la cisterna? ____________

b) ¿Cuántos litros de agua hay en la cisterna en este momento?

____

c) ¿A qué altura se encuentra el agua? Describan cómo lo determinaron. ____________

____

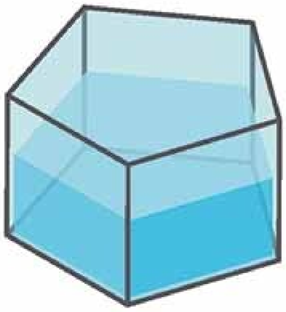
d) Si se llena la cisterna durante 30 minutos a razón de 35 L/min, ¿qué altura alcanzará el agua después media hora?

____

e) ¿Qué espacio dentro de la cisterna, en m^3, ocupa el agua? ____________

pareja

3. Lean la información y resuelvan los problemas.



Willy compró una pecera con forma de prisma pentagonal, como la que se muestra, cuya capacidad es de 43 galones: Recueda que 1 gal = 3.785 L.

a) Si la base de la pecera tien 40 cm por lado y 27.5 cm de apotema, aproximadamente, ¿cuál es la altura de la pecera? ______

b) Expliquen el procedimiento que siguieron para responder. ______

______

______

c) Si se recomienda llenar la pecera máximo a 52 cm, ¿cuántos litros de agua se necesitan para llenarla? ______

equipo

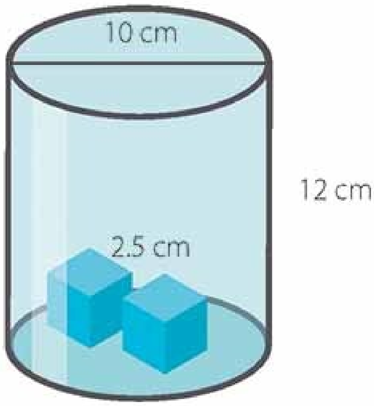
4. Comparen sus respuestas y procedimientos con las de otros compañeros. Si existen diferencias, revisen los procedimientos en busca del error. Si requieren ayuda, busquen el apoyo del profesor.

Ponlo en práctica

individual

5. Lee la información y resuelve.

Laura colocó en un vaso con forma de cilindro dos cubos que sirven para enfriar pero que no se derriten, como se muestra. El vaso mide 10 cm de diámetro y 12 cm de alto y los cubos miden 2.5 cm por lado.



a) Si se llena el vaso 3 cm debajo de su máxima capacidad, ¿cuántos mililitros de agua tendrá el vaso?

______

b) La capcidad máxima del vaso es mayor o menor a ¾ L? ______

6. Resuelve los problemas.

a) Un perfume con forma de prisma octagonal contiene 150 ml de líquido. Si el envase tiene altura de 1.2 dm, ¿cuánto mide el área de su base? ______

b) Si se hace una presentación del mismo perfume en un envase con forma de prisma hexagonal, cuya base mide 2 cm de lado y 1.7 cm de apotema, ¿cuál debe ser la altura del envase? ______

individual

1. Calcula el volumen de las siguientes cajas de regalo.

V = __________ *V* = __________

2. Se juntaron cierto número de prismas triángulares iguales para formar un prisma poligonal. El triángulo tiene dos ángulos de 70º, su base mide 6 cm y tiene altura de 8.24 cm.

a) Si la altura del prisma mide 11.5 cm, ¿cuál es el volumen del prisma poligonal que se formó? __________

b) ¿Cuántos prismas triangulares se usaron? Justifica tu respuesta. __________

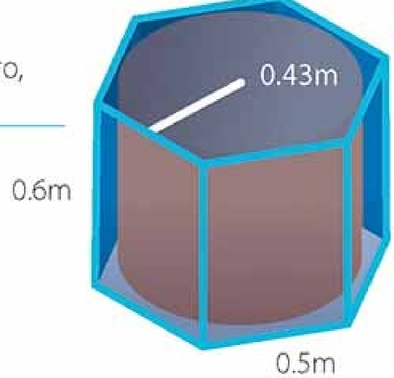
3. Resuelve.

a) Una ampolleta con forma de cilindro tiene capacidad de 18 ml. Si su altura es de 45 mm, ¿cuántos mm mide el radio de su base? __________

b) La altura de un cilindro es de 1.2 m y su diámetro mide ¼ de la altura. ¿Cuántos es la capacidad del cilindro? __________

4. Dentro de un prisma hexagonal se colocó un cilindro sólido cuyo radio mide lo mismo que la apotema del prisma, como muestra la imagen.

Si se llena de agua el espacio dentro del prisma que no ocupa el cilindro, ¿cuántos litros caben? __________



Probabilidad Teórica

Aprendizaje esperado: Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

¿Qué es más probable?

individual

Exploramos

1. En cada situación escribe las expresiones: "más probable", "menos probable" o "igualmente probable".

a) Al lanzar un dado, que salga dos es ____________________ a que salga un número impar.

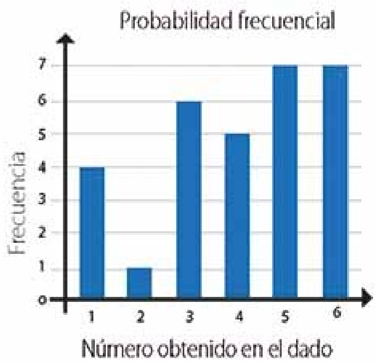
b) Si en una urna hay tres bolas rojas y dos azules, y se toma una al azar, es ____________________ sacar una bola roja.

c) Si se lanzan dos monedas al mismo tiempo, que salgan dos caras diferentes es ____________________ a que salgan dos caras iguales.

d) En un rifa vendieron 100 boletos. Carlo compró cuatro boletos y su primo Emiliano compró otros cuatro: Que gané Carlo es ____________________ a que gane Emiliano.

f) ¿Cómo representarías numéricamente las situaciones anteriores para demostrar tus respuestas? ____________________

2. La siguiente gráfica muestra la probabilidad frecuencial del experimento de lanzar un dado. Completen la tabla con los resultados.



Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1		
2		
3		
4		
5		
6		

a) ¿Cuántas veces se realizó el experimento? ____________________

b) Si lanzaras un dado, ¿elegirías un número con base en los resultados de la gráfica? ¿Por qué? ____________________

c) Considerando el número de veces que se realizó el experimento, ¿cuántas veces hubieras esperado que saliera cada número? Explica tu postura. ____________________

____

Glosario

Frecuencia absoluta. Número de veces que aparece un valor en un estudio estadístico o experimento aleatorio.

Frecuencia relativa. Es igual al cociente de la frecuencia absoluta entre el número de datos o eventos. Se representa como fracción, como decimal o como porcentaje.

Cálculo de la probabilidad teórica de experimentos aleatorios

Propósito Calcularás la probabilidad teórica o clásica de un evento en un experimento aleatorio.

◂ Transitamos

pareja

1. En pareja, discutan la siguiente situación y respondan.

Dos primos juegan a lanzar dos dados de seis caras. Antes de cada lanzamiento deben elegir el número que corresponda a la suma de los dos dados. Si sale dicho número ganan un punto.

a) ¿Qué números se pueden obtener al sumar los puntos de ambos dados? ______

____

Su prima Araceli, que los observaba, comentó: "da lo mismo elegir cualquier número, porque todos tienen la misma probabilidad de ocurrir".

b) Comenten si están o no de acuerdo con lo dicho por Araceli y argumenten su postura. ____________________________

____

2. Completen la siguiente tabla que muestra todos los posibles resultados al lanzar dos dados.

		Dado rojo					
	+	1	2	3	4	5	6
Dado verde	1	2	3				
	2						
	3		5				
	4						
	5						
	6						

a) ¿Cambió su postura después de completar la tabla?

____

____

b) ¿Cuántos resultados posibles hay al lanzar dos dados?

____

c) ¿Qué suma tiene más probabilidad de salir? ¿Por qué? ________________

____

d) ¿Qué resultado tiene menos probablidad de ocurrir? ________________

equipo

3. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan sobre la manera de representar y comparar numéricamente la probabilidad de ocurrencia de todos los posibles resultados. Busquen llegar a acuerdos, después registren en su cuaderno la probabilidad de cada resultado.

pareja

Para formalizar

4. Realicen una lectura comentada de la siguiente información. Después, revisen el registro que hicieron de la probabilidad de ocurrencia de los resultados de lanzar dos dados para validarla o corregir si fuera necesario.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se conoce como **espacio muestral** y existen diferentes maneras de representarlo. Por ejemplo, al lanzar una moneda se tienen dos resultados posibles: águila y sol. El espacio muestral es:

$$E = \{\text{águila, sol}\}$$

La **probabilidad teórica**, también conocida como probabilidad clásica, permite anticipar los posibles resultados de un evento al realizar un experimento aleatorio, cuando éstos se realizan bajo las mismas condiciones y todos tienen la misma posibilidad de ocurrir. Se calcula de la siguiente forma:

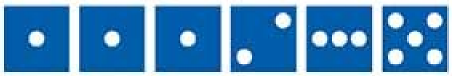
$$P(x) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

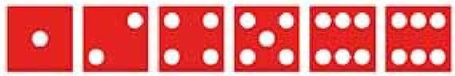
Así podemos establecer que la probabilidad teórica del evento "águlia" es:

$$P(A) = \frac{\text{número de veces del evento águila}}{\text{total de eventos}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

5. Resuelvan el siguiente problema.

Los primos de la actividad construyeron un par de dados especiales, cuyas caras tienen los números que se muestran en las siguientes imágenes.





a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 12? ¿Por qué? ____________

b) Registren en su cuaderno el espacio muestral del experimento de lanzar estos dados. Después, con base en su registro, determinen la probabilidad teórica de cada resultado.

P (2): ________ P (3): ________ P (4): ________ P (5): ________ P (6): ________

P (7): ________ P (8): ________ P (9): ________ P (10): ________ P (11): ________

c) ¿Cuál es la probabilidad teórica de que la suma de los dados sea un número par?

____

d) ¿Cuánto suman las probabilidades de todos los eventos? ____________

Si se repitiera el experimento 100 veces, ¿cuántas consideran que saldría 7?

________ Expliquen cómo lo determinaron: ____________

grupo

6. Comenten en grupo sobre la utilidad de la probabilidad teórica al realizar un experimento aleatorio para tomar decisiones.

pareja

7. Analiza la siguiente ruleta y responde.

El maestro de matemáticas presentó la ruleta a sus estudiantes como parte del trabajo sobre probabilidad. Elegía a cinco estudiantes, a cada uno le tocaba un color al azar, y giraban la ruleta. Si la flecha caía en el color elegido, ese estudiante ganaba un punto.

a) ¿Cuántos posibles eventos hay? Argumenten su respuesta. ______________________

____

b) Al girar la ruleta, ¿todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar el punto? ¿Por qué? ______________________

____

c) ¿Qué procedimiento permite establecer la probabilidad teórica de que la ruleta caiga en cada color? ______________________

____

8. Realicen lo necesario y anoten la probabilidad teórica de que la ruleta caiga en cada color. Escriban el resultado como fracción simplificada.

P (Verde): ________ P (Rojo): ________ P (Azul): ________

P (Amarillo): ________ P (Anaranjado): ________

a) Si la ruleta se gira 20 veces, ¿cuántas es probable que caiga en el sector azul? Expliquen cómo lo determinaron. ______________________

____

b) Si se repite 100 veces el experimento, ¿cuántas veces es probable que caiga en verde? ______________________

____

c) ¿Pueden tener certeza de que así sucederá en ambos casos? Argumenten por qué. ______________________

____

En mi entorno

Para el Sorteo Magno de la Lotería Nacional se imprimen 60 000 billetes y se venden tres series (billetes) de cada número. El sorteo otorga 12 956 premios y reintegros. Busca un procedimiento para calcular la probabilidad de ganar un premio si se compra una serie completa. Si cada serie o billete se divide en 20 cachitos, ¿cambia la probabilidad si sólo se compra un cachito? ¿Por qué?

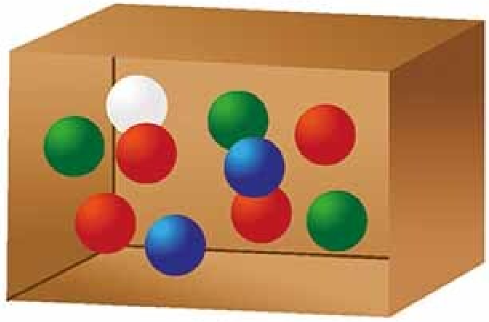
equipo

9. Discutan la última pregunta en grupo en busca de llegar a acuerdos. ¿Qué relación hay entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica? Comenten si piensan que son iguales. O ¿qué se necesita que ocurra para que esto suceda? Registren sus acuerdos con el apoyo del profesor.

Ponlo en práctica

10. Observen la siguiente urna y respondan.

Considera el experimento de sacar una pelota, sin ver, registrar el resultado y regresar la pelota a la urna.



a) ¿Cuál es la probabilidad teórica de tomar una pelota de cada color?

b) Si se realizan 100 extracciones, ¿cuántas veces es probable que salga cada color?

c) Si al hacer cierto número de extracciones se espera sacar 55 veces la bola azul, ¿de cuántas extracciones se está hablando?

11. Considera el experimento de lanzar al mismo tiempo un dado de seis caras y una moneda de \$5.

a) ¿Cuáles son todos los posibles eventos del experimento?

E = { }

b) ¿Algún evento tiene mayor probabilidad de salir?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga águila y un número par?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol y el número seis?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número del 1 al 6 y águila o sol?

12. En un despacho hay 12 empleados y por medio de un sorteo se les obsequiará un bono semanal, uno por persona cada semana hasta que los 10 reciban el bono.

Hay 5 hombres y 3 usan lentes, y 7 mujeres y 2 usan lentes.

a) Para el primer bono, ¿cuál es la probabilidad de que una mujer que no use lentes sea elegida?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se lo gane una persona que usa lentes?

c) Si el primer bono lo gana un hombre sin lentes, ¿qué probabilidad hay de que el segundo bono lo gane uno que usa lentes?

Probabilidad teórica vs. probabilidad frecuencial

Propósito Calcularás la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio y la compararás con la probabilidad frecuencial al realizar el experimento.

pareja

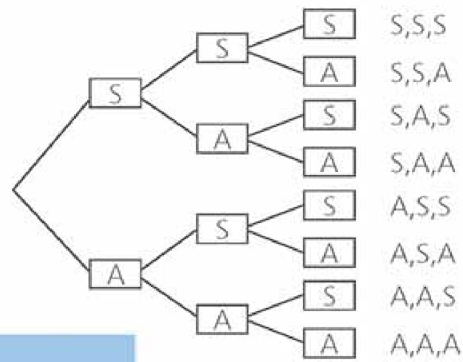
1. Realicen las siguientes actividades en parejas.

El siguiente diagrama de árbol muestra el espacio muestral de los resultados de lanzar tres monedas al mismo tiempo.

a) Determinen la probabilidad teórica de cada resultado:

P (2 águilas, 1 sol) = ______ P (3 águilas) = ______

P (3 soles) = ______ P (2 soles, 1 águila) = ______



b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres caras iguales? ______

c) Calculen las veces que se espera obtener cada resultado, según el número de repeticiones que muestra la tabla.

		Número de repeticiones			
Veces que se espera obtener el resultado.	Evento	40	120	200	240
	Dos águilas, un sol				
	Tres águilas				
	Tres soles				
	Dos soles, un águila				

2. Consigan tres monedas y, en pareja, realicen el experimento de lanzarlas 40 veces. Hagan 20 y 20 lanzamientos de manera simultánea, para optimizar el tiempo.

Anoten y junten sus resultados. Al final, completen la siguiente tabla. Después, respondan las preguntas de la siguiente página.

Evento	Frecuencia absoluta 40 lanzamientos	Frecuencia relativa
Dos águilas, un sol		
Tres águilas		
Tres soles		
Dos soles, un águila		
Total		

a) ¿En todos los casos o en alguno de ellos la probabilidad frecuencial es similar a la probabilidad teórica? ___

b) ¿Qué piensan que pase con la probabilidad frecuencial al realizar el experimento 240 veces? ___

3. Repitan el experimento, pero ahora 60 veces. Después, reúnanse con otra pareja y junten sus resultados. Registren los 120 resultados en la siguiente tabla.

Evento	Frecuencia absoluta 120 lanzamientos	Frecuencia relativa
Dos águilas, un sol		
Tres águilas		
Tres soles		
Dos soles, un águila		

equipo

4. Comparen sus resultados con los de otras dos parejas.

a) ¿Hubo similitudes? ¿En qué caso fueron más parecidos? ___

b) Junten sus resultados con los de sus compañeros para obtener 240 experimentos.

c) Registren los resultados en una sola tabla. Comparen la frecuencia relativa de cada resultado con su probabilidad teórica.

Evento	Frecuencia absoluta 240 lanzamientos	Frecuencia relativa
Dos águilas, un sol		
Tres águilas		
Tres soles		
Dos soles, un águila		

d) ¿En cuál de las tablas la probabilidad frecuencial es más parecida a la probabilidad teórica? ___

e) ¿Qué sucedió entre ambas probabilidades entre más veces repitieron el experimento? ___

equipo

5. Junten los resultados de todo el grupo y calculen la frecuencia relativa de cada evento y compárenla con la probabilidad teórica de cada evento. Con el apoyo del profesor, registren sus conclusiones sobre los resultados de la actividad.

pareja

6. Lee junto con un compañero la siguiente información. Si tienen dudas, acudan con su profesor para aclararlas.

◀ Para formalizar

Al cociente que resulta de dividir el número de veces que ocurre un evento y el número de veces que se realizó el experimento se le conoce como **probabilidad frecuencial** o **probabilidad empírica**.

Dado el evento A, la probabilidad frecuencial se denota como:

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que sucedió el evento A}}{\text{Número de veces que se realizó el experimento}}$$

Entre más veces se repite un experimento aleatorio, sus resultados muestran cierta regularidad y tienden a parecerse a la probabilidad teórica, lo cual permite hacer una anticipación de los posibles resultados que se obtendrán en el experimento, pero nunca se podrá tener certeza de lo que ocurrirá.

7. Consideren el lanzamiento de dos dados legales de seis caras y calculen la probabilidad de los siguientes eventos. Después, respondan.

a) Probabilidad de que la suma sea un número par: ______

b) Probabilidad de que la suma sea nueve o un número mayor: ______

c) Probabilidad de obtener un número que no sea 7: ______

d) Si se lanzan 100 veces dos dados, ¿de cuántas veces se espera que la suma sea 12?

______

e) ¿Cuántas veces se espera que la suma será 7? ______

Consulta en...

Ingresa a: https://www.geogebra.org/m/X3EEpavD para simular el lanzamiento de dos dados. Manipula el interactivo modificando el número de lanzamientos y observa cómo se mueve la gráfica entre más veces se repite el experimento.

8. Completen una tabla considerando las veces que esperan que salga cada suma al realizar el lanzamiento de dos dados 300 veces.

9. Lance cada uno 20 veces un dado. Registren los resultados de ambos en la siguiente tabla. En total registrarán 40 lanzamientos.

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia											

a) Piensen: si en lugar de 40 lanzamientos hubieran sido 100, ¿cambiaría la probabilidad de que saliera algún número? ______

b) ¿Cómo piensan que sería la gráfica de barras al registrar los resultados de 200 lanzamientos?

______

Ponlo en práctica

individual

10. Lee la información y simula el siguiente experimento.

En una caja o bolsa opaca coloca seis pelotas del mismo tamaño y textura: tres azules, dos negras y una blanca.

a) ¿Cuál es la probabilidad teórica de extraer una pelota verde? ____________

b) ¿Qué probabilidad hay de extraer una pelota negra, blanca o azul? ________

c) ¿Qué probabilidad hay de extraer una pelota negra? ____________

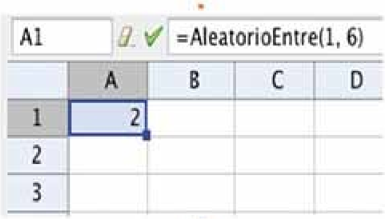
d) Si se repite el experimento de extraer una pelota 500 veces, ¿cuántas es probable extraer cada pelota? ____________________________________

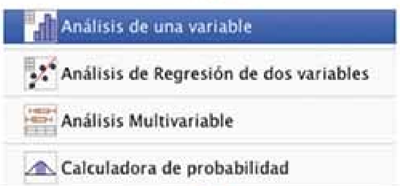
____

11. Simula el experimento con un dado, asigna tres números a las pelotas azules, dos a las negras y uno a la blanca.

a) Realiza el experimento 30, 50, 100 y 180 veces.
b) Registra tus resultados en una tabla de datos. Después, construye la gráfica de barras correspondiente.

12. En un archivo de GeoGebra, en una computadora, puedes simular el lanzamiento de un dado y registrar los resultados en una gráfica de barras de la siguiente manera:





a) Abre un archivo y en la ventana "Vista" activa la opción "Hoja de Cálculo".
b) En la celda A1 escribe la fórmula: =aleatorioentre(1, 6) y da enter. La celda mostrará un número entre 1 y 6, como en la imagen:
c) Elige la celda A1 y, sin soltar el cursor, arrástralo hasta la celda A20. Cada celda mostrará un número del 1 al 6.
d) Para construir la gráfica de barras de los resultados, elige "Análisis de una variable" y en la ventana que se muestra da clic en "Analiza". Después, elige "Gráfica de barras".
e) Coloca el cursor en la celda A1 y arrástrala hacia abajo y observa cómo se modifican los valores de la gráfica. Repite la acción varias veces.

Repite la simulación, pero elige 50, 100, 200 y 300 celdas. En cada caso, construye la gráfica correspondiente, modifica los valores varias veces y analiza cómo varían las barras en cada caso.

a) ¿En qué caso la probabilidad frecuencial fue más parecida a la probabilidad teórica? ____________________________________

b) Al modificar los datos, ¿en qué caso hubo menos variación? ____________

13. Comparte tu trabajo con tus compañeros. Comenten sobre la experiencia de trabajar en GeoGebra y acerca de las conclusiones que obtuvieron a partir de los resultados.

individual

1. Con base en la información que se da a continuación, respondan las preguntas.

En la escuela de Marián organizaron una rifa de una pantalla, para la cual vendieron 120 boletos. Los alumnos de primero compraron 45 boletos; los de segundo, 32 boletos y los de tercero, 28 boletos.

a) Calcula la probabilidad teórica de que el premio lo gane un alumno de cada grado:

Primero: ______ Segundo: ______ Tercero: ______

b) ¿Qué probabilidad hay de que el premio no sea entregado? ______________

2. En una actividad escolar en la clase de Educación Física, el profesor trabaja con los alumnos de cuatro grupos, que tienen la cantidad de integrantes que se muestra:

1° A: 20 estudiantes, 1° B: 18 estudiantes, 2° A: 21 estudiantes y 2° B: 25 estudiantes

a) Si el profesor elige a un estudiante al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea de 2° A?

____

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 1° A? ______________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 2° B? ______________

3. Construye en cartulina la ruleta de la lección 15.1. Puedes usar un clip como "flecha" y un lápiz como apoyo para girar el cilp. Cerciórate de que la ruleta puede girar con facilidad.

a) Gira 40 veces la ruleta y registra los resultados en tu cuaderno.

b) Después, reunido con otros dos compañeros, junta los resultados para tener 120 giros y regístralos en la tabla. Primero completa la probabilidad teórica de que caiga cada color.

Color	Probabilidad teórica	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Verde			
Amarillo			
Rojo			
Azul			
Anaranjado			

c) ¿En qué casos la probabilidad frecuencial se acercó más a la probabilidad teórica?

____

d) ¿Qué pueden concluir sobre la probabilidad teórica y la probabilidad frecuencial al realizar un experimento aleatorio? ______________

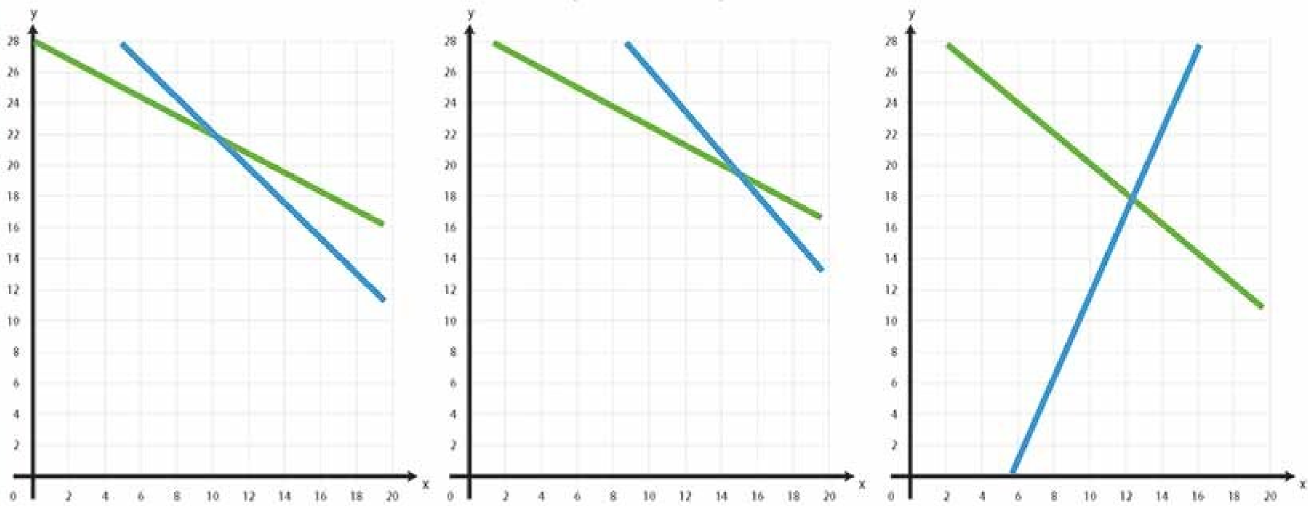
Hasta
DÓNDE LLEGUÉ

1. Resuelve.

En una empresa trabajan 114 personas. Si el número de mujeres rebasa en 16 personas al número de hombres, ¿cuántas mujeres y hombres trabajan en dicho lugar? ____________________

2. ¿Qué gráfica representa el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2?

$$x + y = 34;\ x + 2y = 55$$



3. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones?

$\begin{cases} 2x - 2y = 34 \\ 4x = 17 + 4y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y = 18 \\ 3x + 2y + 36 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 4x + y = 18 \end{cases}$

4. El doble de un número más otro es igual a 23. Si el triple del primero menos el segundo es igual a 12, ¿de qué números se trata? ____________________

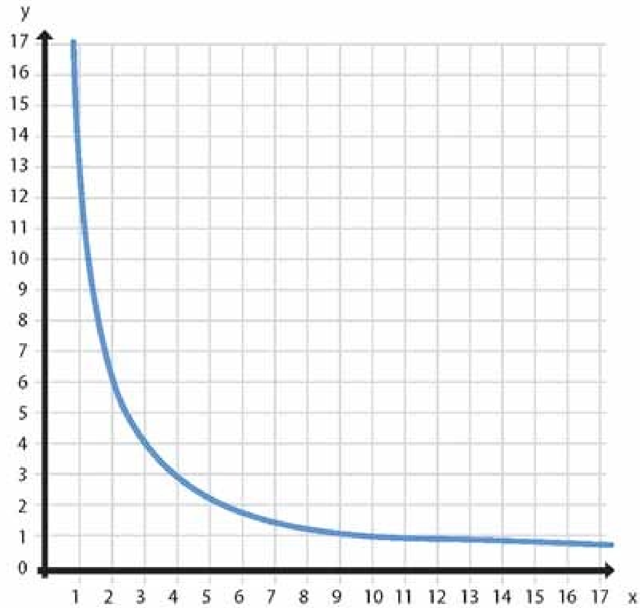
5. Completa la siguiente gráfica que representa una relación de proporcionalidad inversa.

Velocidad (km/h)	70	85	100	110	115
Tiempo (h)	4.5				

6. ¿Cuál de las siguiente expresiones algebraicas representa la información que muestra la gráfica.

a) $y = \frac{8}{x}$ b) $y = \frac{12}{x}$

c) 8x d) 24



7. Resuelve:

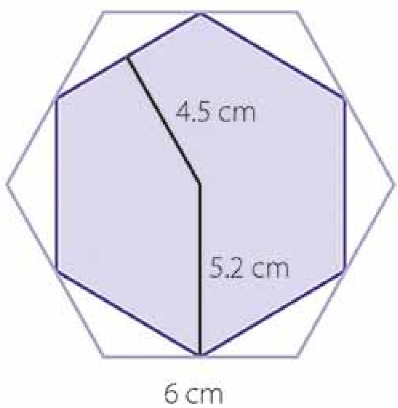
a) Alejandro cortó un espejo con forma de octágono regular. Si sus lados miden 12 cm y su apotema 14.4 cm, ¿cuál es el área del espejo? ______

b) Un pentágono regular tiene área de 340 cm^2, y su apotema mide 6.8 cm, ¿cuánto miden sus lados?

______

8. Calcula el área sin colorear en la siguiente figura.

Área sin colorear = ______



9. La siguiente imagen muestra una pista de lanzamiento de bala. El círculo corresponde al lugar desde donde los atletas lanzan la bala.

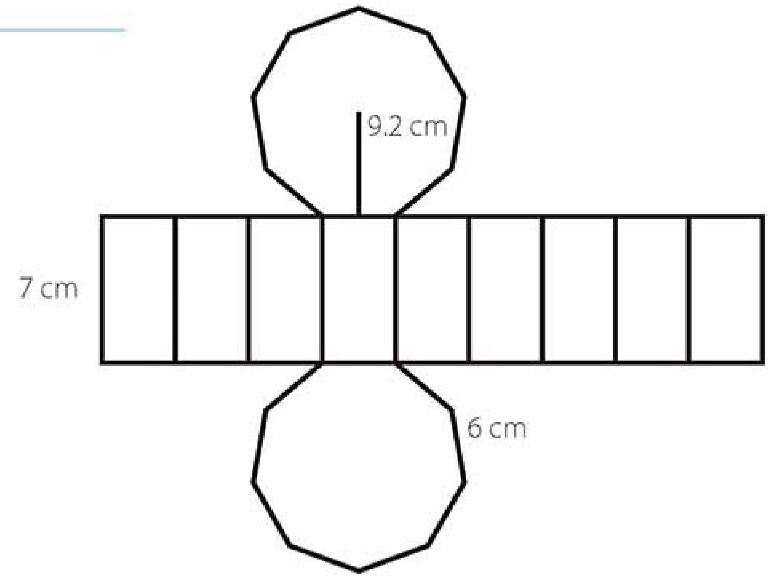
¿Cuánto mide el área del círculo de lanzamiento?

______

Hasta
DÓNDE LLEGUÉ

10. ¿Cuál es el volumen que ocupa el prisma y que se puede construir con el siguiente desarrollo plano?

Volumen = ______________



11. Resuelve los siguientes problemas.

a) Una moneda de $10 tiene 28 mm de radio y un grosor de 2 mm. Si se apilan 18 monedas, ¿cuál es el volumen de la torre que se forma en cm^3? ______________

b) Un tinaco con forma de cilindro tiene una capacidad de 6 780 L. . Si el área de su base mide 4.52 m^2, ¿cuál es la altura del tinaco? ______________

12. Calcula la probabilidad teórica de cada evento a partir de la siguiente información.

En una urna hay pelotas del mismo tamaño y textura: 7 verdes, 5 rojas y 6 blancas. Si se saca una pelota sin ver, al azar…

a) ¿qué probabilidad hay de que no sea blanca? ______________

b) ¿qué probabilidad hay de que sea azul? ______________

c) ¿qué probabilidad hay de que sea verde? ______________

13. En un grupo de segundo de secundaria hay 32 estudiantes.

a) Si la profesora elige a un estudiante al azar y la probabilidad de que use lentes es de 3/8, ¿cuántos estudiantes usan lentes? ______________

b) Un alumno dice: la probabilidad de elegir un hombre en el grupo es de 7/16. ¿Cuántas mujeres hay en el grupo? ______________

Autoevaluación

Lee los siguientes enunciados y utiliza los parámetros para evaluar el logro de tus aprendizajes durante el bloque. Anota en la columna de la derecha el número que corresponda a tu desempeño.

1 = Insuficiente	2 = Bajo	3 = Me cuesta trabajo	4 = Lo logré

Indicadores	Desempeño
Resuelvo problemas de sistemas de ecuaciones 2 × 2, mediante el método gráfico y determino el número de soluciones.	
Resuelvo problemas de sistemas de ecuaciones 2 × 2, mediante diversos procedmientos: sustitución, igualación y suma y resta.	
Resuelvo problemas de proporcionalidad inversa, de manera gráfica y los represento de manera algebraica.	
Calculo el área de polígonos irregulares mediante la descomposición en otras figuras y el área de polígonos regulares.	
Calculo el área de círculos aplicando la fórmula correspondiente y resuelvo problemas que involucran la relación de los elementos involucrados en la fórmula.	
Resuelvo problemas de cálculo del volumen de prismas y de cilindros rectos.	
Identifico la relación entre las unidades de volumen y de capacidad en la resolución de problemas.	
Calculo la probabilidad teórica de experimentos aleatorios e identifico su relación con la probabilidad frecuencial al realizar el experimento.	

Describe lo que consideras que tienes que hacer para mejorar tu desempeño en el siguiente bloque.

Abscisa. Primer elemento de las coordenada (x, y) que definen un punto en un plano, corresponde al eje x.

Ángulo. Abertura formada por dos semirectas con un mismo origen denominado vértice.

Ángulos adyacentes. Son los que tienen un lado común y el otro lado pertecen a la misma recta.

Ángulo central. Ángulo que va del centro de una circunferencia a dos puntos sobre ella. En polígonos regulares, es el ángulo que va del centro de la figura a dos vértices consecutivos.

Ángulo exterior. Ángulo que se forma con un lado de un polígono y la prolongación de su lado adyacente.

Ángulo interior. Ángulo que se forma entre dos lados consecutivos de un polígono.

Ángulos suplementarios. Son dos ángulos que suman 180º.

Área. Superficie comprendida entre ciertos límites que se mide en unidades cuadradas.

Cilindro. Cuerpo geométrico formado por dos base circulares y una cara lateral curva.

Círculo. Región interior de una circunferencia.

Circunferencia. Línea curva cerrada cuyos puntos están a la misma distancia de un punto llamado centro.

Cociente de potencias de la misma base. Es igual a la misma base elevada a la diferencia de los exponentes (exponente del dividendo menos exponente del divisor): $2^5 \div 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$.

Constante de proporcionalidad directa. Es el cociente entre las variables que guardan una relación directamente proporcionalidad: $k = \frac{y}{x}$

Constante de proporcionalidad inversa. Es igual al producto de las variables: $k = xy$.

Decalitro. Medida de capacidad equivalente a diez litros.

Decilitro: Medida de capacidad equivalente a la décima parte de un litro.

Desigualdad. Relación matemática que indica que dos expresiones no son iguales.

Desviación. En estadística, diferencia de cada valor con la media. La suma de las desviaciones es igual a cero.

Desviación media. Es igual al promedio de la distancia de los datos de un conjunto a su media.

Diámetro. Segmento que toca dos puntos de una circunferencia, que pasa por su centro.

Diagonal. segmento que une dos vértices no consecutivos de una figura geométrica.

Diámetro: Segmento que une dos puntos de una circunferencia y que pasa por su centro.

Dispersión. Medida cuantitativa que indica que tan separados o alejados están los valores de un conjunto de acuerdo con un valor de referencia.

Ecuaciones equivalentes. Son dos o más ecuaciones que tienen la misma solución.

Equidistar. Estar (dos o más puntos o cosas) a la misma distancia de otro o a la misma distancia entre sí.

Experimento aleatorio. Es aquel en el que no se puede predecir o anticipar el resultado exacto de un evento en particular.

Exponente. Número que indica la potencia a la que hay que elevar una cantidad. Cuando el exponente es 1 no se coloca ($x^1 = x$).

Expresión algebraica. Combinación de letras y números unidos por los signos de operación.

Figura a escala. Es aquella cuyos lados guardan proporcionalidad con los lados de una figura original.

Factor. Cada uno de los términos de una multiplicación.

Factor constante de proporcionalidad. Valor por el que se multiplica una variable para obtener su correspondiente. Comúnmente se simboliza con la letra k.

Finito. Que tiene fin, término o límite.

Fracción. Expresión de un número dividido entre otro. Tiene la forma $\frac{a}{b}$, con a y b como números naturales y b distinto de cero.

Fracción decimal. Fracción que tiene como denominador un número que es potencia de 10.

Fracción impropia. Aquella en que el numerador es mayor que el denominador.

Fracción irreductible. Fracción representada en su mínima expresión.

Fracción propia. Aquella cuyo numerador es menor que el denominador.

Fracciones equivalentes. Son las que representan el mismo valor pero de diferente forma.

Función lineal. Se define como la función de dos variables como una expresión de la forma $y = ax + b$. Su representación gráfica es una recta.

Galón. Unidad de capacidad del Sistema Inglés equivalente a 3.785 L.

Gráfica de línea. Gráfica que se utiliza para analizar como varía un dato en función del tiempo.

Hectárea. Medida de superficie que equivale a 10 000 m^2.

Hectólitro. Medida de capacidad equivalente a 100 litros.

Hipérbola. Nombre de la curva que forma una gráfica que representa una relación de proporcionalidad inversa.

Histograma. Gráfica de barras que representa valores continuos agrupados por intervalos.

Incógnita. Nombre que reciben cada una de las literales involucradas en una igualdad algebraica.

Intervalo de clase. Nombre que reciben los intervalos en que se divide un conjunto de datos, los cuales deben tener el mismo rango.

Jerarquía de operaciones. Orden en que deben resolverse las operaciones múltiples.

Kilolitro. Medida de capacidad equivalente a mil litros.

Litro. Unidad principal de medidas de capacidad. Equivalente a un dm^3.

Lenguaje algebraico. Expresa información matemática por medio de letras y números.

Marca de clase. Punto medio o promedio de los valores extremos de un intervalo de clase.

Media aritmética. Cociente de la suma de los valores de un conjunto de datos entre el número de datos.

Mediana. Valor que se encuentra al centro de un conjunto de datos, cuando están ordenados de menor a mayor.

Cuando el número de datos es par, es la media de los dos valores centrales.

Medidas de dispersión. Son parámetros que indican como se alejan los datos respecto de la media.

Milla. Unidad de longitud del Sistema Inglés que se usa para medir distancias grandes. Una milla es igual a 1.609 km.

Moda. Valor que más se repite en un conjunto de datos cualitativos o cuantitativos.

Notación científica. Forma abreviada de representar un número muy grande o muy pequeño como una multiplicación de un número entre 1 y menor que 10 por una potencia de 10.

Números enteros. Conjunto de los números positivos, negativos y el cero: $\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots$

Números naturales. Son los números que se utilizan para medir o contar:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$$

Números negativos. Conjunto de los números enteros , decimales y fracionarios menores que cero, a los cuales les antecede el signo "menos": $-1, -2, -3, -4, -5\ldots$

Números positivos. Conjunto de los números enteros, decimales y fraccionarios mayores que cero: $1, 2, 3, 4, 5\ldots$

Números simétricos u opuestos. Números que en la recta numérica están a la misma distancia del cero, pero de lados opuestos.

Número (pi) π. Es la constante que relaciona el perímetro de una circunferencia con la medida de su diámetro. Es un número con extensión decimal infinita, que se redondea a 3.1416

Onza. Unidad de masa del Sistema Inglés equivalente a 38.35 g.

Onza líquida. Unidad de capacidad del Sistema Inglés equivalente a 29.58 ml.

Ordenada. Segundo elemento de las coordenada (x, y) que definen un punto en un plano, corresponde al eje y.

Ordenada al origen. Punto donde una recta corta al eje y, le corresponde la coordenada $(0, y)$.

Origen. Punto de intersección de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas.

Pendiente. Inclinación que representa una gráfica en el plano cartesiano.

Pentágono. Polígono de 5 lados.

Perímetro. Contorno de una superficie o figura. Se mide en unidades lineales.

Pie. Unidad de longitud del Sistema Inglés equivalente a 30.48 cm.

Polígono de frecuencias. Gráfica que se forma al unir, en su punto más alto, la marca de clase de los intervalos de clase en un histograma. Se considera una gráfica cerrada porque empieza y termina en cero.

Polígono regular. Figuras geométricas que tienen todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

Potencia. Representación abreviada de una multiplicación de un mismo factor, por ejemplo, 3^4, donde 3 es la base y el 4 el exponente.

Potencia de una potencia. Es igual a la misma base elevada al producto de los exponentes:

$$(3^4)^4 = 3^{(4)(4)} = 3^{16}.$$

Pulgada. Unidad de medidas de longitud del Sistema Inglés, equivalente a 2.54 cm.

Probabilidad frecuencial. Número de veces que ocurre un evento al realizar un experimento aleatorio.

Probabilidad teórica. También llamada probabilidad clásica y es igual a la razón del número de maneras en que un evento puede ocurrir entre el número de resultados posibles.

Producto de potencias de la misma base. Es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes de los factores: $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$.

Proporcionalidad inversa. Relación entre dos magnitudes, en la que al aumentar una la otra disminuye en la misma proporción, o al disminuir una, la otra aumenta de la misma manera. Algebraicamente es de la forma: $y = k/x$.

Radio. Segmento que une el centro de una circunferencia con cualquiera de su puntos.

Rango. En estadística, es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos ordenados.

Razón. Relación entre dos magnitudes que son comparables entre sí. Por ejemplo, 2 de cada 5 personas usan lentes: razón 2:5.

Recta paralelas. Pares de rectas que siempre están a la misma distancia.

Rectas perpendiculares. Pares de rectas que se cortan en un punto formado ángulos rectos.

Regla de tres. Se puede establecer una igualdad entre dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c} \rightarrow x = \frac{ac}{b}$$

Segmento. Porción de recta limitada por dos puntos.

Sistema de ecuaciones lineales 2 × 2. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución. El punto de intersección de la gráfica de ambas ecuaciones representa la solución. Cuando las rectas son paralelas el sistema no tiene solución y cuando comparten todos sus puntos, el sistema tiene infinitas soluciones.

Sucesión. Conjunto ordenado de números o figuras que siguen una regla o patrón.

Sucesión aritmética. Sucesiones cuya diferencia entre términos consecutivos es constante y son de la forma: $an + b$.

Término de una sucesión. Cada uno de los elementos que forman una sucesión y se enumeran en orden ascendente.

Teselado. Construcción geometría que sigue cierto patrón o regularidad y que permite cubrir el plano, sin que sus elementos se encimen o queden huecos entre ellos.

Triángulo. Figura geométrica de tres lados y tres ángulos.

Truncar. Reducir un número decimal al número de cifras que se requiera (décimos, centésimos, etc.).

Valor absoluto. Es igual a la distancia de un número al cero y se representa entre dos barras (| |).

Yarda. Unidad de longitud del sistema inglés equivalente a 91.44 cm.

Bibliografía para el estudiante

Zubieta, G. et al., (2000), *Geometría dinámica. Enseñanza de las matemáticas con tecnología,* SEP

Howard Gardner (1997). La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas. Biblioteca del Normalista

Andy Hargreaves, Lorna Earl, Jim Ryan (2000). Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes. Biblioteca del normalista.

Cesaroli, A. (2005). Los diez magníficos. México: Biblioteca del aula, Serie Espejo de Urania, sep/ Ediciones Maeva.

https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/09/el-hombre-que-calculaba.pdf

http://www.siruela.com/archivos/fragmentos/El_diablodelosNumeros.pdf

https://pitacoradeclase.files.wordpress.com/2013/01/el-asesinato-del-profesor-de-matematicas-jordi-sierra-i-fabra1.pdf

https://pitacoradeclase.files.wordpress.com/2013/01/el-senor-del-cero-maria-isabel-molina1.pdf Editorial: ALFAGUARA JUVENIL

http://www.librosmaravillosos.com/elteoremadelloro/pdf/elteoremadelloro%20-%20Denis%20Guedj.pdf

file:///C:/Users/esperanza.issa/Downloads/Geometria%20Recreativa%20-%20Yakov%20Perelman.pdf

Sitios de consulta y para practicar para el estudiante*.

* www.sinewton.org/numeros/

https://es.khanacademy.org/

https://www.vitutor.com/index.html

http://red.ilce.edu.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=117

www.sectormatematica.cl/revistas.htm

* Todas las páginas fueron consultadas el 20 de junio de 2018

Bibliografía para el profesor

Batanero, Ma. Del C. et al. (1996), *Razonamiento combinatorio*, Madrid, Síntesis

Chevallard, I. (1997) *Estudiar matemáticas*. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje, México, SEP, BAM

Gardner, Howard, (1997), *La mente no escolarizada*. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñan en las escuela, México, SEP/Paidós

Perrenoud, P., (2007), *Diez competencias para enseñar: una invitación al viaje*. Barcelona, Graó

Sadovsky, Patricia, (2005), *Enseñar matemáticas hoy*, Libros del zorzal, SEP

Potter, Lawrence, (2015), *A jugar con las matemáticas*, México, SEP

Brousseau, G. (1986), *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática, Facultad de m atemática, astronomía y física,* Universidad Nacional de Córdoba

Sadovsky, P., (2005) *Teoría de las Situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Bibliografía consultada

Brousseau, G. (1986), *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*, Facultad de matemática, astronomía y física, Universidad Nacional de Córdoba

Batanero, Ma. Del C. et al. (1996), *Razonamiento combinatorio,* Madrid, Síntesis

Eves, Howard (1969), *Estudio de las geometrías*, México, UTEHA

Rivaud, Juan J. (1981), *Trigonometría*, México, Limusa

Zubieta, G. et al., (2000), *Geometría dinámica. Enseñanza de las matemáticas con tecnología*, SEP

Vélez, D. y Varela, O. *El descubrimiento de los números negativos*. PDF

Mayor, J., Suengas, A., y González-Marqués, J. (1993). *Estrategias Metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar*. Ed. Síntesis Psicología. Madrid.

Fernando Alonso, et al., (Grupo Azarquiel) (1993), *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Ed. Síntesis, España

http://cuentame.inegi.org.mx/

https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2730749.pdf

https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2748780

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

www.pendiente.mx
N. 11111